DOI:10.33942/sit.nes007 УДК 519.683.5

БИРИНЧИ ТЕКТЕГИ ОПЕРАТОРДУК ТЕНДЕМЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫ ҮЧҮН КАЛЫПТАНДЫРУУЧУ ОПЕРАТОР

Усенов И.А.[1], Канатбекова Н.[2], Кубанычбекова П.[3]

(1) к. ф.- м. н., доцент Ж. Баласагына атындагы Кыргыз улуттук университети, математика жана информатика факультети, iausen@mail.ru
(2) магисрант, «математика» багыты, Ж. Баласагына атындагы Кыргыз улуттук университети, математика жана информатика факультети, Nasu_kanatbekova95@mail.ru
(3) 4-курстун студенти, «математика» багыты, Ж. Баласагына атындагы Кыргыз улуттук университети, математика жана информатика факультети, Kamaperi0@gmail.com, Бишкек шаары, Кыргызстан

Аннотация. *Биринчи тектеги сызыктуу эмес оператордук тендеменин классы гильберт мейкиндигинде изилденген. Баштапкы берилиштерден турумдуу болгон жакындаштырылган чыгарылыш тургузулду. Берилген тендеменин так чыгарылышына жакындаштырылган чыгарылыштын жыйналуучулугу далилденген. Калыптандыруучу параметирдин кетирилген каталардан коз карандылыгы табылган.*

Негизги создор. *Оператордук тендеме, калыптандыруучу оператор, жыйналуучулук, биринчи тектеги тендеме.*

РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ ОПЕРАТОР ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

Усенов И.А.[1], Канатбекова Н.[2], Кубанычбекова П.[3]

(1) к. ф.- м. н., доцент Кыргызский Национальный Университет им. Ж.Баласагына, факультет математики и информатики, iausen@mail.ru,
(2) магисрант, направление «математика», Кыргызский Национальный Университет им. Ж. Баласагына, факультет математики и информатики,
(3) студентка 4-курса, направление «математика», Кыргызский Национальный Университет им. Ж. Баласагына, факультет математики и информатики, Kamaperi0@gmail.com, г. Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *В Гильбертовом пространстве исследован класс нелинейных операторных уравнений первого рода. Построено приближенное решение, устойчивое относительно исходных данных задач. Доказана сходимость приближенного решения к точному решению исходного уравнения. Произведен выбор параметра регуляризации от погрешностей.*

Ключевые слова*: Операторное уравнение, регуляризация, сходимость, уравнение первого рода.*

REGULARIZING OPERATOR FOR SOLVING THE OPERATIONAL EQUATION OF THE FIRST KIND

Usenov I.A.[1], Kanatbekova N.[2], Kubanychbekova P.[3]

(1)Ph.D., Associate Professor, Kyrgyz National University after J. Balasagyna, Faculty of Mathematics and Computer Science, iausen@mail.ru,
(2)graduate student, direction "mathematics", Kyrgyz National University named after J. Balasagyna, Faculty of Mathematics and Computer Science,
(3)4-year student, direction "mathematics", Kyrgyz National University named after J. Balasagyna, Faculty of Mathematics and Computer Science, Kamaperi0@gmail.com, Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. *A class of nonlinear operator equations of the first kind is investigated in the Hilbert space. An approximate solution is constructed that is stable with respect to the initial data of the problems. The convergence of the approximate solution to the exact solution of the original equation is proved. The selection of the regularization parameter of the errors.*
Key words*: Operator equation, regularization, convergence, equation of the first kind.*

Введение. Для регуляризации решения линейного и нелинейного операторного уравнения в гильбертовом пространстве посвящены работы авторов [1-10].

Ранее авторами [5-10] построены регуляризирующие операторы для решения операторного уравнения первого рода, когда предполагаемое точное решение истокообразно представимо через линейный оператор.

В данной работе исследовано операторное уравнение, когда линейный оператор является самосопряженным, положительным и предполагаемое точное решение истокообразно представимо через нелинейный оператор.

Пусть заданы операторы

$$Az=\int_0^1 tz(s)ds,\quad AK\left(z\right)=\int_0^1 tsz^2(s)ds\,.$$

Тогда исследуемое уравнение запишется в виде

$$\int_0^1 tz(s)ds=u\left(t\right)+\int_0^1 tsz^2(s)ds \quad (1)$$

Допустим, что при $u_0(t)=\dfrac{t}{4}$ уравнение (1) имеет точное решение $z_0(t)$ представимо в виде

$$z_0(t)-z_0^2(t)=\int_0^1 tv_0(s)ds\,.$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение второго рода вида

$$\alpha z_\alpha(t)+\int_0^1 tz_\alpha(s)ds=\frac{t}{4}+\left(\alpha E+\int_0^1 ts(\cdot)ds\right)z_\alpha^2(t)\,. \qquad (2)$$

Введем обозначение

$$f_\alpha(t)=\frac{t}{4}+\left(\alpha E+\int_0^1 ts(\cdot)ds\right)z_\alpha^2(t)\,. \qquad (3)$$

Тогда уравнение (2) запишется в виде:

$$\alpha z_\alpha(t) + \int_0^1 t z_\alpha(s)ds = f_\alpha(t). \tag{4}$$

Введем обозначение

$$c = \int_0^1 z_\alpha(s)ds, \tag{5}$$

то из (4) имеем

$$\alpha z_\alpha(t) + ct = f_\alpha(t)$$

или

$$z_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} f_\alpha(t) - \frac{c}{\alpha} t. \tag{6}$$

Для того чтобы найти постоянную C, формулу (6) подставим в (5):

$$c = \int_0^1 \left(\frac{1}{\alpha} f_\alpha(s) - \frac{c}{\alpha} s \right) ds = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 f_\alpha(s)ds - \frac{c}{\alpha} \int_0^1 s ds = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 f_\alpha(s)ds - \frac{c}{2\alpha}. \tag{7}$$

Найдем из (7) значение C:

$$c\left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} f_\alpha$$

или

$$c = \frac{2}{2\alpha + 1} f_\alpha, \tag{8}$$

где

$$f_\alpha = \int_0^1 f_\alpha(s)ds = \int_0^1 \left[\frac{s}{4} + \left(\alpha E + \int_0^1 s\tau(\cdot)d\tau \right) z_\alpha^2(s) \right] ds = \frac{1}{4} \int_0^1 s ds +$$

$$\alpha \int_0^1 z_\alpha^2(s)ds + \int_0^1 \int_0^1 s\tau \cdot z_\alpha^2(\tau) d\tau ds = \frac{1}{8} + \alpha \int_0^1 z_\alpha^2(s)ds + \frac{1}{2} \int_0^1 s z_\alpha^2(s)ds.$$

Значение f_α подставим в (8) ,имеем

$$c = \frac{1}{4(2\alpha + 1)} + \frac{2\alpha}{2\alpha + 1} \int_0^1 z_\alpha^2(s)ds + \frac{1}{2\alpha + 1} \int_0^1 s z_\alpha^2(s)ds. \tag{9}$$

Формулы (9) и (3) подставим в (6) и получим

$$z_\alpha(t)=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{t}{4}+\alpha z_\alpha^2(t)+\int_0^1 tsz_\alpha^2(s)ds\right]-\frac{t}{\alpha}\left[\frac{1}{4(2\alpha+1)}+\frac{2\alpha}{2\alpha+1}\int_0^1 z_\alpha^2(s)ds+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\alpha+1}\int_0^1 sz_\alpha^2(s)ds\ \right]=\frac{t}{2(2\alpha+1)}+\frac{2}{2\alpha+1}\int_0^1 tsz_\alpha^2(s)ds+z_\alpha^2(t)-\frac{2t}{2\alpha+1}\int_0^1 z_\alpha^2(s)ds= \quad (10).$$

$$=\frac{t}{2(2\alpha+1)}+\frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha z_\alpha^2(t)+\int_0^1 tsz_\alpha^2(s)ds\right)+\frac{1}{2\alpha+1}\left(z_\alpha^2(t)-2t\int_0^1 z_\alpha^2(s)ds\right).$$

По предположению точное решение $z_0(t)$ уравнения (1) представимо в виде

$$z_0(t)-z_0^2(t)=\int_0^1 tv_0(s)ds, \tag{11}$$

где элемент $v_0(t)$ имеет вид

$$v_0(t)=2z_0(t)-2z_0^2(t). \tag{12}$$

(12) подставим в (11):

$$z_0(t)-z_0^2(t)=\int_0^1 t\left(2z_0(s)-2z_0^2(s)\right)ds=2t\int_0^1 z_0(s)ds-2t\int_0^1 z_0^2(s)ds.$$

Отсюда получаем, что

$$z_0(t)\equiv 2t\int_0^1 z_0(s)ds. \tag{13}$$

$$z_0^2(t)\equiv 2t\int_0^1 z_0^2(s)ds. \tag{14}$$

Из тождества (14) получаем предельное соотношение

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(z_\alpha^2(t)-2t\int_0^1 z_\alpha^2(s)ds\right)=z_0^2(t)-2t\int_0^1 z_0^2(s)ds=0. \tag{15}$$

Из (15) следует верность равенства

$$z_\alpha^2(t)=2t\int_0^1 z_\alpha^2(s)ds. \tag{16}$$

В силу (16) формула (10) запишется в виде

$$z_\alpha(t)=\frac{2}{2\alpha+1}\cdot\frac{t}{4}+\frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E+\int_0^1 ts(\cdot)ds\right)z_\alpha^2(t). \tag{17}$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$ из (17) имеем

$$z_0(t) = 2 \cdot \frac{t}{4} + 2\int_0^1 tsz_0^2(s)ds. \tag{18}$$

Уравнение (1) при $u_0(t) = \frac{t}{4}$ имеет точное решение $z_0(t)$, в этом случае имеет место тождество

$$\int_0^1 tz_0(s)ds \equiv \frac{t}{4} + \int_0^1 tsz_0^2(s)ds, \tag{19}$$

тогда из (18) имеем

$$z_0(t) = 2\int_0^1 tz_0(s)ds. \tag{20}$$

В силу тождества (13) из (20) получим тождество

$$z_0(t) = z_0(t). \tag{21}$$

Тождество (21) показывает, что действительно (18) является решением уравнения (1).

Покажем, что решение $z_\alpha(t)$ уравнения (2) является приближенным решением уравнения (2). Для этого оценим разность $z_\alpha^0 - z_0$, где z решение уравнения (2) при $u(t) = u_0(t) = \frac{t}{4}$.

$$z_\alpha^0 - z_0 = \frac{2}{2\alpha+1} \cdot \frac{t}{4} + \frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E + \int_0^1 ts(\cdot)ds\right) z_\alpha^{0\,2}(t)) - 2 \cdot \frac{t}{4} - 2\int_0^1 tsz_0^2(s)ds =$$

$$= \frac{2}{2\alpha+1}\left(\int_0^1 tz_0(s)ds - \int_0^1 tsz_0^2(s)ds\right) + \frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E + \int_0^1 ts(\cdot)ds\right) z_\alpha^{0\,2}(t)) -$$

$$-2\left(\int_0^1 tz_0(s)ds - \int_0^1 tsz_0^2(s)ds\right) - 2\int_0^1 tsz_0^2(s)ds = \frac{2}{2\alpha+1}\int_0^1 tz_0(s)ds - \frac{2}{2\alpha+1}\int_0^1 tsz_0^2(s)ds +$$

$$+ \frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E + \int_0^1 ts(\cdot)z_\alpha^{0\,2}(t)\right) - 2\int_0^1 tz_0(s)ds + 2\int_0^1 tsz_0^2(s)ds - 2\int_0^1 tsz_0^2(s)ds =$$

$$= -\alpha \cdot \frac{2}{2\alpha+1}\left(z_0(t) - z_0^2(t)\right) + \frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E + \int_0^1 ts(\cdot)ds\right)\left(z_\alpha^{0\,2}(t) - z_0^2(t)\right) =$$

$$= -\alpha \cdot \frac{2}{2\alpha+1}\int_0^1 t(\cdot)dsv_0(t) + \frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E + \int_0^1 ts(\cdot)ds\right)\left(z_\alpha^{0\,2}(t) - z_0^2(t)\right).$$

Рассмотрим норму разности $z_\alpha^0 - z_0$

$$\left\|z_\alpha^0 - z_0\right\| \le \alpha\left\|\frac{2}{2\alpha+1}\int_0^1 t(\cdot)ds\right\| \cdot \left\|v_0(t)\right\| + \left\|\frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E + \int_0^1 ts(\cdot)ds\right)\right\| \cdot \left\|z_\alpha^{0\,2}(t) - z_0^2(t)\right\| \le$$

$$\le \alpha \cdot \left\|v_0(t)\right\| + 2N\left\|z_\alpha^0(t) - z_0(t)\right\|, \qquad (22)$$

где

$$\left\|z_\alpha^0(t) + z_0(t)\right\| = N.$$

Отсюда при условии $N < \frac{1}{2}$ имеем

$$\left\|z_\alpha^0(t) - z_0(t)\right\| \le \frac{\alpha \cdot \left\|v_0(t)\right\|}{1-2N}. \qquad (23)$$

Из оценки следует, что при $\alpha \to 0$

$$z_\alpha^0 \to z_0,$$

т.е. решение уравнения (16) является приближенным решением уравнения (1).

Пусть вместо элемента u_0 нам известно его приближенное значение $u_\delta = \frac{t}{4} + \delta$.

Тогда решение уравнения (16) в силу представления (17) запишется в виде:

$$z_\alpha^\delta(t) = \frac{2}{2\alpha+1}\left(\frac{t}{4} + \delta\right) + \frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E + \int_0^1 ts(\cdot)ds\right) z_\alpha^{\delta\,2}(t). \qquad (24)$$

Оценим разность $z_\alpha^\delta - z_0$.

Используя неравенство треугольника, имеем

$$\left\|z_\alpha^\delta - z_\alpha\right\| \le \left\|z_\alpha^\delta - z_\alpha^0\right\| + \left\|z_\alpha^0 - z_0\right\|. \qquad (25)$$

Второе слагаемое в правой части (25) удовлетворяет неравенству (23).

Оценим первое слагаемое в правой части (25)

$$\left\|z_\alpha^\delta - z_\alpha^0\right\| = \left\|\frac{2}{2\alpha+1}\left(\frac{t}{4} + \delta\right) + \frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E + \int_0^1 ts(\cdot)ds\right) z_\alpha^{\delta\,2}(t) - \frac{2}{2\alpha+1} \cdot \frac{t}{4}\right\| -$$

$$- \left\|\frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E + \int_0^1 ts(\cdot)ds z_\alpha^{0\,2}\right)\right\| \le \left\|\frac{2}{2\alpha+1}\left(\frac{t}{4} + \delta - \frac{t}{4}\right)\right\| + \left\|\frac{2}{2\alpha+1}\right\| \times$$

$$\times \left\|\alpha E + \int_0^1 ts(\cdot)ds\right\| \cdot \left\|z_\alpha^{\delta\,2} - z_\alpha^{0\,2}\right\| \le \frac{\delta}{\alpha} + 2N\left\|z_\alpha^{\delta\,2} - z_\alpha^{0\,2}\right\|.$$

Отсюда при $N < \frac{1}{2}$ имеем

$$\left\| z_{\alpha}^{\delta^2} - z_{\alpha}^{0} \right\| \le \frac{\frac{\delta}{\alpha}}{1-2N}. \tag{26}$$

Тогда в силу неравенств (23) и (26) из (25) имеем

$$\left\| z_{\alpha}^{\delta} - z_0 \right\| \le \frac{\frac{\delta}{\alpha}}{1-2N} + \frac{\alpha \cdot \|v_0(t)\|}{1-2N}. \tag{27}$$

Введем обозначение

$$\frac{1}{1-2N} = c_1, \qquad \|v_0(t)\| \cdot c_1 = c_2. \tag{28}$$

После введенных обозначений неравенство (27) запишется в виде:

$$\left\| z_{\alpha}^{\delta} - z_0 \right\| \le c_1 \cdot \frac{\delta}{\alpha} + c_2 \cdot \alpha. \tag{29}$$

Правая часть неравенства (29) является функцией от параметра α, т.е.

$$\psi(\alpha) = c_1 \cdot \frac{\delta}{\alpha} + c_2 \cdot \alpha. \tag{30}$$

Найдем минимум этой функции

$$\psi^{/}(\alpha) = -c_1 \cdot \frac{\delta}{\alpha^2} + c_2 = 0.$$

Отсюда находим зависимость параметра регуляризации от погрешности δ, т.е.

$$\alpha(\delta) = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \cdot \sqrt{\delta}. \tag{31}$$

Найденное значение α подставим в правую часть (30) и имеем

$$\psi(\alpha(\delta)) = 2\sqrt{c_1 \cdot c_2} \cdot \sqrt{\delta}. \tag{32}$$

Тогда неравенство (29) имеет вид

$$\left\| z_{\alpha(\delta)}^{\delta} - z_0 \right\| \le 2\sqrt{c_1 \cdot c_2} \cdot \sqrt{\delta}. \tag{33}$$

Отсюда следует, что при $\delta \to 0$

$$z_{\alpha(\delta)}^{\delta} \to z_0.$$

Заключение. Построено приближенное решение нелинейного интегрального уравнения I-го рода в случае, когда решение принадлежит $L_2(0,1)$ - пространству квадратично суммируемых функций. Здесь уравнение второго рода является уравнением Эйлера для сглаживающего функционала Тихонова нулевого порядка.

Получена сходимость приближенного решения к точному решению исходного уравнения при стремлении параметра к нулю.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ***Тихонов А.Н.*** *Об устойчивости обратных задач \\ДАН СССР. 1943. Т. 39.№5.*

2. ***Лаврентьев М.М.*** *О некоторых некорректных задачах математической физики \\СО АН СССР. Новосибирск , 1962.*

3. ***Иванов В.К.*** *О линейных некорректных задачах \\ ДАН СССР. 1962. Т. 145.*

4. ***Лаврентьев М.М.*** *Об интегральных уравнениях I-го рода \\ ДАН СССР. 1959. Т. 127..№1*

5. ***Тихонов А.Н.*** *О решении некорректно поставленных задач \\ДАН СССР. 1963. Т. 151. №3.*

6. ***Тихонов А.Н.*** *О регуляризации некорректно поставленных задач \\ДАН СССР. 1963. Т. 153. №1.*

7. ***Саадабаев А.*** *Приближенные методы решения нелинейных интегральных и операторных уравнений 1-го рода. Бишкек: 1997.218с.*

8. ***Усенов И.А*** *Построение регуляризирующих операторов для решения нелинейных операторных уравнений // диссер. кандид. наук., Бишкек: 1999. 108с.*

9. ***Усенов И.А.*** *Регуляризация решения операторного уравнения Гаммерштейна первого рода // Исслед. по интегро-дифф. урав., вып. №41. Бишкек: «Илим» 2009. С. 63-67.*

10. ***Усенов И.А.*** *Построение приближенного решения нелинейного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016.№1. С.8-14.*

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-08-14.