

## МЕТОД ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЖИМОВ ЗАБЕТОНИРОВАННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Молодин В.В. <sup>(1)</sup>, Чиркунов Ю.А. <sup>(2)</sup>, Гармс Е.В. <sup>(3)</sup>, Горшкова К.Е. <sup>(4)</sup>

<sup>(1)</sup> Заведующий кафедрой, профессор кафедры ТОС, и.о. Проректора по науке и перспективному развитию; НГАСУ (Сибстрин), Россия, Новосибирск; vladimir@molodin.org

<sup>(2)</sup> Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики; НГАСУ (Сибстрин), Россия, Новосибирск; chr102@yandex.ru

<sup>(3)</sup> Студент; НГАСУ (Сибстрин), Россия, Новосибирск; 27061998@mail.ru

<sup>(4)</sup> Студент; НГАСУ (Сибстрин), Россия, Новосибирск; kseniya.gorshkova@mail.ru

**Аннотация.** С развитием технологий, появлением новых методов бетонирования, использованием различных химических добавок производство бетонных работ стало носить круглогодичный характер. Строительная отрасль не стоит на месте, постоянно развиваясь. По сей день ведутся поиски способов, обеспечивающие наиболее рациональное бетонирование. Это позволит увеличить темпы строительства без потери качества. Данная статья будет интересна практикам строительного производства.

Центральной задачей в области строительства стало прогнозирование температурных режимов забетонированных конструкций. Многими учеными и исследователями были предложены различные методики расчета, демонстрирующие зависимость прочности от времени и температуры. Но каждый метод имел определенные недостатки, что влекло за собой дополнительные и необоснованные расходы.

Целью данной исследовательской работы является получение расчетных формул, описывающих температурный режим в забетонированных конструкциях, с помощью нелинейных подмоделей, полученных методами группового анализа дифференциальных уравнений. Основными критериями, которым должны соответствовать уравнения, являются простота и удобство для практического использования в условиях строительной площадки. В статье рассмотрены две нелинейные подмодели, показывающие распределение тепла при бетонировании колонны с использованием внешних источников тепла, приведены экспериментальные данные бетонирования фрагмента бетонной колонны при различных режимах подачи тепла и сравнение полученных практических результатов с теоретическими данными.

На основании полученных данных было выявлено следующее:

1. Нелинейные подмодели показывают хорошую аппроксимацию с практическими результатами;
2. Наиболее точное описание получилось для случая малой и средней мощности;
3. Доказана эффективность использования подмоделей, найденных методами группового анализа дифференциальных уравнений.

**Ключевые слова:** зимнее бетонирование; подмодели; метод группового анализа; прочность.

## METHOD OF GROUP ANALYSIS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR FORECASTING TEMPERATURE RANGES OF CONCRETE CONSTRUCTIONS

V.V. Molodin<sup>1</sup>, Y.A. Chirkunov<sup>2</sup>, E.V. Garms<sup>3</sup>, K.E. Gorshkova<sup>4</sup>

<sup>(1)</sup> Doctor of Engineering Sciences, Assoc.; Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin); vladimir@molodin.org

<sup>(2)</sup> Doctor Phys.-Math. Sciences, Assoc.; Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin); chr102@yandex.ru

<sup>(3)</sup> Student; Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin); 27061998@mail.ru

<sup>(4)</sup> Student; Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin); kseniya.gorshkova@mail.ru

### **Annotation**

*With the development of technology, the emergence of new methods of concreting, the use of various chemical additives, the production of concrete works began to be year-round. The construction industry does not stand still, constantly evolving. To this day, a search is underway for methods that provide the most rational concreting. This will increase the pace of construction without loss of quality. This article will be of interest to construction practitioners.*

*The central task in the field of construction was the prediction of temperature conditions of concrete structures. Many scientists and researchers have proposed various calculation methods that demonstrate the dependence of strength on time and temperature. But each method had certain disadvantages, which entailed additional and unreasonable expenses.*

*The aim of this research work is to obtain calculation formulas that describe the temperature regime in concreted structures using nonlinear submodels obtained by group analysis of differential equations. The main criteria that the equations must meet are simplicity and convenience for practical use in a building site. The article considers two nonlinear submodels showing the distribution of heat during concrete pouring using external heat sources, provides experimental data on concreting a fragment of a concrete column under different modes of heat supply, and compares the practical results with theoretical data.*

*Based on the data obtained, the following was revealed:*

- 1. Nonlinear submodels correlate well with practical results;*
- 2. The most accurate description was obtained for the case of low and medium power;*
- 3. The efficiency of using submodels found by the methods of group analysis of differential equations is proved.*

**Keywords:** winter concreting; submodels; group analysis method; strength.

## **МЕТОДУ ТОПТУК ТАЛДОО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕНДЕМЕ БИРГЕ ЧЫГАРЫЛСА БОЛЖОЛДОО ҮЧҮН ТЕМПЕРАТУРАЛЫК РЕЖИМДЕРДИН ЗАБЕТОНИРОВАННЫХ КОНСТРУКЦИЯЛАРДЫН**

**Молодин В.В.<sup>(1)</sup>, Чиркунов Ю. А.<sup>(2)</sup>, Гармс А. В.<sup>(3)</sup>, Горшкова К. А.<sup>(4)</sup>**

<sup>(1)</sup> кафедра башчысы, ТОС кафедрасынын профессору, илим жана келечектеги өнүгүү боюнча проректордун и. а. НГАСУ (Сибстрин), Россия, Новосибирск; vladimir@molodin.org

<sup>(2)</sup> физика-математика илимдеринин доктору, жогорку математика кафедрасынын башчысы; Нгасу (Сибстрин), Россия, Новосибирск; chr102@yandex.ru

<sup>(3)</sup> Студент; НГАСУ (Сибстрин), Россия, Новосибирск; 27061998@mail.ru

<sup>(4)</sup> Студент; НГАСУ (Сибстрин), Россия, Новосибирск; kseniya.gorshkova@mail.ru

### **Кыскача маалымат**

*Технологиялардын өнүгүшү менен бетондоонун жаңы ыкмалары пайда болуп, ар кандай химиялык кошулмаларды колдонуп, бетон жумуштарын өндүрүү жыл бою боло баштады. Курулуш тармагы бир орунда турбайт, туруктуу өнүгүп жатат. Бүгүнкү күнгө чейин эң рационалдуу бетондоону камсыз кылуунун жолдорун издөө жүрүп жатат. Бул сапатын жоготпостон курулуштун темпин жогорулатат. Бул макала курулуш өндүрүшүнүн адистерин кызыктырат.*

*Курулуш чөйрөсүндөгү борбордук тапшырма бетондолгон курулмалардын температуралык режимин алдын-ала айтуу болгон. Көптөгөн илимпоздор жана изилдөөчүлөр күчтүн убакыт менен температурага көз карандылыгын көрсөткөн ар кандай*

эсептөө методдорун сунушташкан. Бирок ар бир ыкманын айрым кемчиликтери болгон, бул кошумча жана негизсиз чыгымдарды шарттаган.

Бул илимий иштин максаты - дифференциалдык теңдемелерди топтук анализдөө жолу менен алынган сызыктуу субмоделдерди колдонуп, бетондолгон структуралардагы температура режимин сүрөттөгөн долбоордук формулаларды алуу. Теңдемелер жооп бериши керек болгон негизги критерийлер - курулуш аянтчасында практикалык колдонуу үчүн жөнөкөйлүк жана ыңгайлуулук. Макалада тышкы жылуулук булактарын колдонуп, колоннаны бетондоодо жылуулуктун бөлүштүрүлүшүн көрсөткөн эки сызыктуу субмодель талкууланып, ар кандай жылуулук берүү режиминде бетон мамычанын фрагментин бетондоо боюнча эксперименталдык маалыматтар келтирилген жана алынган практикалык натыйжалар теориялык маалыматтар менен салыштырылган.

Алынган маалыматтардын негизинде төмөнкүлөр аныкталды:

1. Сызыктуу эмес субмоделдер практикалык натыйжалар менен жакшы жакындаштырууларды көрсөтүшөт;
2. Төмөнкү жана орто кубаттуулук үчүн эң так сүрөттөмө алынды;
3. Дифференциалдык теңдемелерди топтук анализдөө методдору менен табылган субмоделдерди пайдалануунун натыйжалуулугу далилденди.

**Ачкыч сөздөр:** кыш мезгилинде бетондоо; submodels; топтук анализ ыкмасы; күч.

## **1. Введение**

Строительство – это ведущая отрасль народного хозяйства России. В последнее время особенно распространено монолитное строительство, которое занимает основное место в данной отрасли. Учитывая климатическую особенность нашей страны, необходимо было перейти к круглогодичному характеру ведения работ. Такой переход требовал гарантированного качества забетонированных конструкций не только в летних условиях, но и зимних. Чтобы обеспечить наиболее рациональное бетонирование, необходимо научиться прогнозировать изменение температуры и нарастание прочности твердеющего бетона.

Протекание теплового процесса в любой точке тела в любой момент времени можно описать линейным дифференциальным уравнением Фурье, которое является основным уравнением теплопроводности. Достаточно просто можно получить аналитическое решение для тел идеальной формы. В практике ставится трехмерная задача, усложненная нестационарными теплофизическими характеристиками материала и экзотермией цемента, что делает ее более трудоемкой. Решение такой задачи не отвечает заданным критериям, а именно - простота использования в условиях строительной площадки.

Многие теоретики искали способы прогнозирования температуры в забетонированных конструкциях, которые были бы не только удобными в реализации в условиях строительной площадки, но и гарантировали наиболее точный результат. Но каждый способ имел определенные недостатки, что влекло за собой дополнительные и необоснованные расходы.

## **2. Развитие методов прогнозирования температурных режимов забетонированных конструкций**

Расчет остывания бетона, предложенный в 1932 году проф. Б.Г.Скрамтаевым [1], оказался наиболее практичным и достаточно точно описывал тепловой процесс метода «термоса». Расчет основывался на уравнении теплового баланса, но имел ряд допущений. Изначально принималось условие примерного равенства температур по всему объему. Такое допущение значительно упростило расчет и позволило получить простой и удобный метод для практических расчетов.

С развитием технологий появлялись новые способы зимнего бетонирования. «Формула Скрамтаева» в новых методах давала существенное расхождение [2] практических и теоретических результатов. За счет различных допущений многие ученые пытались модернизировать данный расчет, но это не давало нужных результатов [3,4].

Следующим шагом в развитии методов прогнозирования были попытки адаптировать теорию регулярного режима Г.М.Кондратьева [5]. Данная теория основывалась на экспоненциальной зависимости.

Основными недостатками адаптации этой теории являлись:

1. Крайне сложные математические операции, при отклонении от элементарных случаев (шар, пластинка, цилиндр);

2. Сложность в определении продолжительности нерегулярного режима. Отличие нерегулярного режима от регулярного состоит в том, что начальное распределение температуры влияет на процесс нагревания или охлаждения тела, а в регулярном - относительная скорость изменения температуры в любой точке тела остается постоянной и не зависит от времени.

С появлением ЭВМ в 60-70-ых годах появилась возможность учитывать зависимость не только от времени, но и от температуры. Поэтому стали использоваться следующие методы:

1. Классические методы (метод Фурье, метод разделения переменных);

2. Методы интегральных преобразований в конечных или бесконечных пределах (методы Лапласа, Меллина, Гринберга и др.).

Расчетные формулы, полученные этими методами, были громоздкими, что снижало их эффективность в условиях строительного производства.

Также ученые использовали и полуаналитические методы. На практике представление результатов расчетов в виде номограмм оказалось удобным, но данный способ заметно снизил точность расчетов.

В XXI веке началось бурное развитие средств вычислений и методов математического моделирования. Появились новые возможности, что дало толчок в развитии методов прогнозирования температурных режимов бетона.

Впервые связь величины градиента температуры, площади поверхности теплопередачи и времени установил примерно в 1803 году французский ученый Жан-Батист Жозеф Фурье:

$$dQ = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \cdot dS \cdot dt \quad (1)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности  $\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$ ;

$\frac{dT}{dx}$  – градиент температуры  $\frac{\text{К}}{\text{м}}$ ;

$dS$ -площадь поперечного сечения образца;

$dt$ -промежуток времени.

На основе линейного дифференциального уравнения Фурье [6,7] с помощью разностных схем численной аппроксимации многомерных дифференциальных уравнений были получены решения динамики температурных полей в твердеющем бетоне остывающих и прогреваемых конструкций. Полученные решения дали высокую результативность, но были неудобны в применении на практике, т.к. получались громоздкими.

Сейчас многие строительные компании для ежедневных расчетов применяют простые в использовании методики прогнозирования температурных режимов,

основанные на решении линейного дифференциального уравнения Фурье с рядом допущений и грубыми приближениями. Еще одним фактором неточности результатов является то, что нелинейный процесс описывается линейным дифференциальным уравнением, что заведомо делает расчетные формулы малоэффективными.

Некоторые способы используются и по сей день. На практике неточность расчетов компенсируется либо сроками термообработки, либо дополнительным утеплением опалубки. Такая компенсация ведет к неоправданным расходам и повышению трудоемкости.

### 3. *Нелинейные подмодели распределения температуры в колонне при наличии внешнего нестационарного источника тепла*

Для данного исследования мы используем модель, описывающую нелинейный процесс распространения тепла в неоднородном стержне при наличии нестационарного источника тепла, которая задается ур. (2):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( x^\alpha T^\beta \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \gamma(t)T, \quad (2)$$

Где  $T = T(t, x)$ - температура стержня в точке  $x \in (-\infty, \infty)$  в момент времени  $t$ ;

$\alpha$ - параметр, характеризующий неоднородность стержня, произвольная вещественная постоянная;

$\beta$ - параметр, характеризующий нелинейность процесса, произвольная вещественная постоянная;

$\gamma(t) > 0$  – нестационарный коэффициент поступления тепла (в этом коэффициенте также учитывается теплопроводность материала стержня, существенная для нестационарных тепловых процессов)

Задаем выполнение условия ур. (3), согласно которому процесс является нелинейным, стержень – неоднородным и имеется нестационарный источник тепла:

$$\alpha\beta\gamma'(t) \neq 0 \quad (3)$$

Введем функцию  $\varepsilon(t)$ , связанную с функцией  $\gamma(t)$ , для удобства записи и использования последующих формул:

$$\gamma(t) = \frac{1}{\beta} (\ln(\varepsilon'(t)))', \varepsilon'(t) > 0, (\ln(\varepsilon'(t)))'' \neq 0 \quad (4)$$

Выразим из ур. (4)  $\varepsilon(t)$ :

$$\varepsilon(t) = k_1 \int \exp\left(\beta \int \gamma(t) dt\right) dt + k_2, \quad (5)$$

Где  $k_1$  и  $k_2$  – произвольные вещественные постоянные.

Используя нелинейное дифференциальное ур. (1), в работе [8] были получены 13 существенно различных инвариантных подмоделей методами группового анализа дифференциальных уравнений [9] при условиях (2) и (3). Они содержат произвольные параметры  $\alpha, \beta$  и функцию  $\varepsilon(t)$ . При соблюдении заданных условий эти подмодели могут описывать распределение тепла в колонне при зимнем бетонировании при наличии внешнего нестационарного источника тепла.

Зададим функцию  $\varepsilon(t)$ :

$$\varepsilon(t) = t^2 + t + 1 \quad (6)$$

Подставим  $\varepsilon(t)$  в ур. (4):

$$\gamma(t) = \frac{1}{\beta(t + 0,5)} \quad (7)$$

Такая зависимость соответствует экономичному режиму нагрева с зависящим обратно пропорционально от времени нестационарному коэффициенту поступления тепла.

Проанализировав полученные в работе [8] подмодели, для дальнейшего исследования мы взяли следующие 2 подмодели распределения температуры в колонне:

1. Подмодель, для которой точное значение температуры определяется по формуле:

$$T_1 = c_1 x^{\frac{1-\alpha}{\beta+1}} (\varepsilon'(t))^{\frac{1}{\beta}}, \quad (7)$$

при  $\alpha$  и  $\beta \neq 1$ ;

2. Подмодель, для которой точное значение температуры определяется по формуле:

$$T_{10} = (c_8 x + c_9)^{\frac{1}{\beta+1}} (\varepsilon'(t))^{\frac{1}{\beta}}, \quad (8)$$

при  $(1 - \alpha)(\beta + 1) \neq 0$ .

#### **4. Бетонирования фрагмента бетонной колонны при различных режимах подачи тепла**

Исследование температурных полей в бетонируемой конструкции осуществлялось экспериментально путем измерения температур в модельном теле колонны. Габаритные размеры колонны: квадратное сечение - 200×200 мм, высота - 1000 мм. Опалубка для бетонирования колонны выполнена из фанеры ламинированной ФСФ 18 мм (ГОСТ 3916.1-96). В качестве нагревателя использовался широко применяющийся в производственных условиях греющий провод. Греющий провод ПНСВ, диаметром 1,6 мм с теплостойкой электроизоляцией из поливинилхлорида толщиной 0,8 мм (ГОСТ ТУ 16.К71-013-88) длиной петли 50 м.

Провод фиксировался на внутренней поверхности опалубки с шагом 20 мм по всему периметру (рис.2). Греющий провод включался в электрическую сеть, напряжением 220 В. Изменение электрической мощности осуществлялось при помощи лабораторного автотрансформатора АОСН-20-220-75УХЛ4.

В центре колонны зафиксированы хромель-копелевые термопары (ГОСТ 6616-74) с шагом 150 мм. Модель была помещена в холодильную камеру АК-2ФР, блок управления которой предусматривает регулировку температуры в пределах от 0 до - 25°С.



Рис. 1. Общий вид лабораторной модели колонны



Рис. 2. Расположение греющего провода на внутренней поверхности опалубки

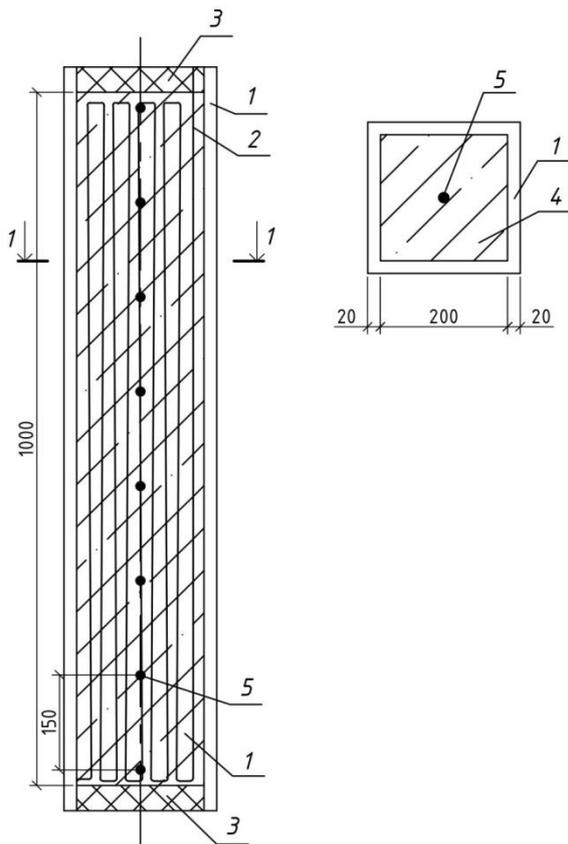


Рис. 3. Экспериментальная модель колонны (1 - опалубка из фанеры ламинированной ФСФ 18 мм; 2 – греющий провод ПНСВ 1,6; 3 – утепление торцов колонны пенопластом ПСБС 70 мм; 4 – модельное тело; 5 – термораствор из термопар «хромель-капель»)

Для удобства проведения эксперимента при различных режимах термообработки и исключения влияния экзотермии цемента, в качестве бетонной смеси использовалось модельное тело, состав которого представлен в табл. 1. Также в состав добавляется NaCl и бентонитовая глина для выравнивания электрофизических свойств и обеспечение водоудерживающей способности смеси соответственно. Модельное тело, приготовленное в лаборатории по своим физическим параметрам - масса, жесткость, теплофизические характеристики, удельное сопротивление - практически не отличалось от реальных бетонных смесей. Начальная температура смеси составляла 22°C,

Таблица 1 - Состав модельного тела, принятого для исследования

Материалы	Расход материалов на 1 м <sup>3</sup> , кг	
	Стандартный бетон В 22,5	Модельное тело
Щебень диабазовый ФР 5-20. ГОСТ 10268-70	1250	1250
Песок кварцевый речной Криводановского карьера М <sub>кр</sub> = 1.8. ГОСТ 10268-70	530	530
Портландцемент М 400. ГОСТ 10178-68	450	-
Молотый песок (S <sub>уд</sub> = 2900 см <sup>2</sup> /г)	-	450
Вода техническая ГОСТ 2874-54	180	180
Объемная масса бетона, кг/м <sup>3</sup>	2410	2410

Были выполнены следующие эксперименты, которые различаются мощностью нагрева колонны:

- 1 – малая мощность: напряжение 11,0 В, сила тока 3,00 А,
- 2 – средняя мощность: напряжение 27.3 В, сила тока 6.21 А,
- 3 – большая мощность: напряжение 37.8 В, сила тока 9.19 А.

Нагрев происходил в течение 25 часов. Все термомпары при нагреве показывали практически одинаковую температуру, которую мы будем обозначать далее через, где для малой мощности нагрева, для средней мощности нагрева, для большой мощности нагрева.

### 5. Сравнение теоретических и экспериментальных данных

Проведем для наглядности сравнение теоретических и экспериментальных данных графически. На графиках представлены приращения температур, а именно:

$$T = T_{n,exp} - 22,2^{\circ}\text{C} \quad (9)$$

Каждому графику присвоен номер n в зависимости от мощности нагрева колонны.

Так как исходная модель была нелинейной, то ее подмодели заведомо не могут аппроксимировать эти приращения температур. Для получения итоговых расчетных формул введем в ур. (7) и ур. (8) поправочные аддитивные слагаемые и коэффициенты:

$$T_m = \lambda T_{m,exact}(t; 0,5) - \mu \quad (10)$$

где m – номер подмодели из работы [8];

$\lambda$  и  $\mu$  - поправочные аддитивные слагаемые и коэффициенты, принимающие конкретные значения для каждой расчетной формулы. Результат сравнения представлен ниже на графиках.

Таблица 2 - Расчетные формулы для прогресса при разных мощностях

Рис №	Коэффициент $\alpha$	Коэффициент $\beta$	Расчетная формула (7)	Расчётная кривая
Случай малой мощности, 33ВА				

4.	1,44	3,0	$T_1 = 5T_{1,exact}(t; 0,5) - 7$	$T = T_1$
5.	1,45	4,0	$T_{10} = 8T_{10,exact}(t; 0,5) - 10$	$T = T_{10}$
6.	2,0	2,0	$T_{10} = 2T_{10,exact}(t; 0,5) - 3$	$T = T_{10}$
Случай средней мощности, 169,5 ВА				
7.	1,45	4,0	$T_1 = 26T_{1,exact}(t; 0,5) - 30$	$T = T_1$
8.	2,0	4,0	$T_{10} = 25T_{10,exact}(t; 0,5) - 29$	$T = T_{10}$
9.	1,44	3,0	$T_{10} = 15T_{10,exact}(t; 0,5) - 19$	$T = T_{10}$
Случай большой мощности, 347,4 ВА				
10.	2,0	4,0	$T_1 = 42T_{1,exact}(t; 0,5) - 51$	$T = T_1$
11.	1,44	3,0	$T_1 = 27T_{1,exact}(t; 0,5) - 31$	$T = T_1$
12.	1,45	4,0	$T_{10} = 45T_{10,exact}(t; 0,5) - 50$	$T = T_{10}$

$\alpha = 1.44, \beta = 3$

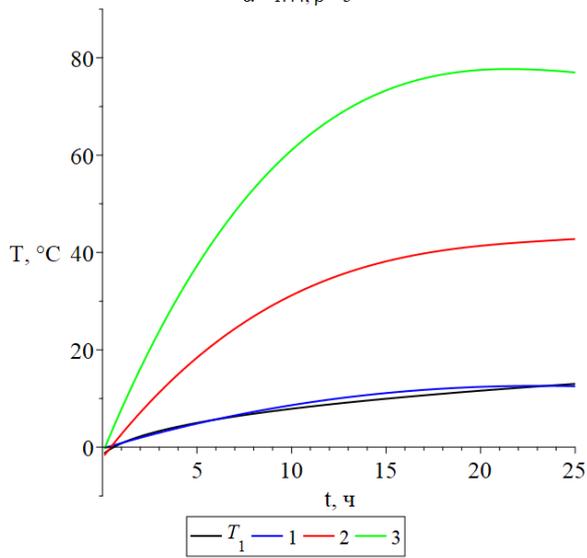


Рис. 4

$\alpha = 1.45, \beta = 4$

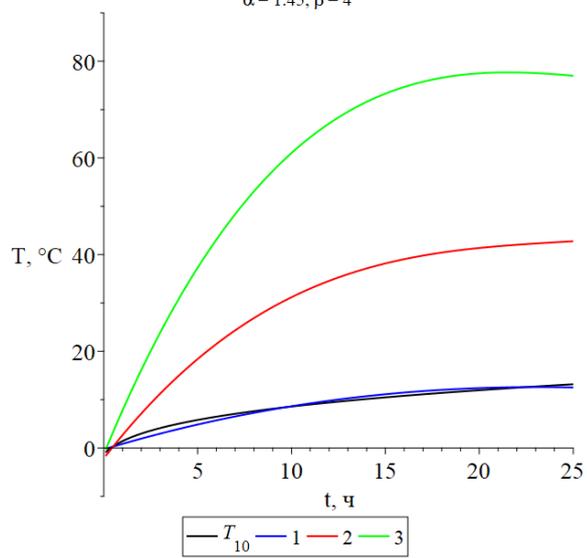


Рис. 5

$\alpha = 2, \beta = 2$

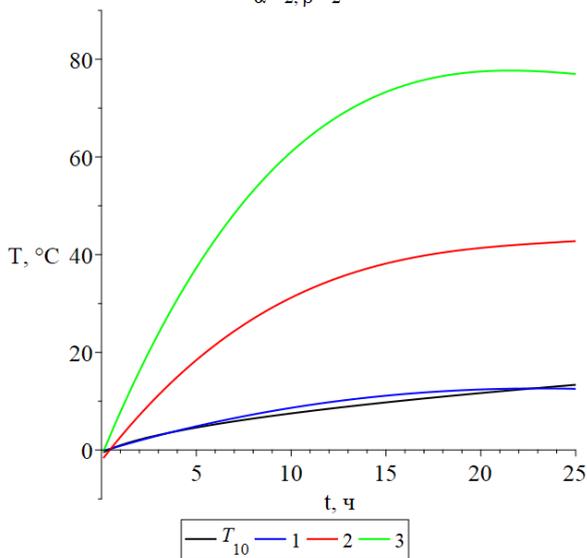


Рис. 6

$\alpha = 1.45, \beta = 4$

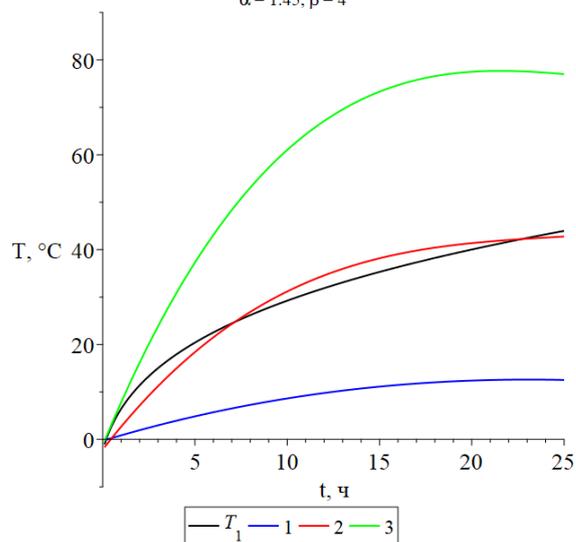


Рис. 7

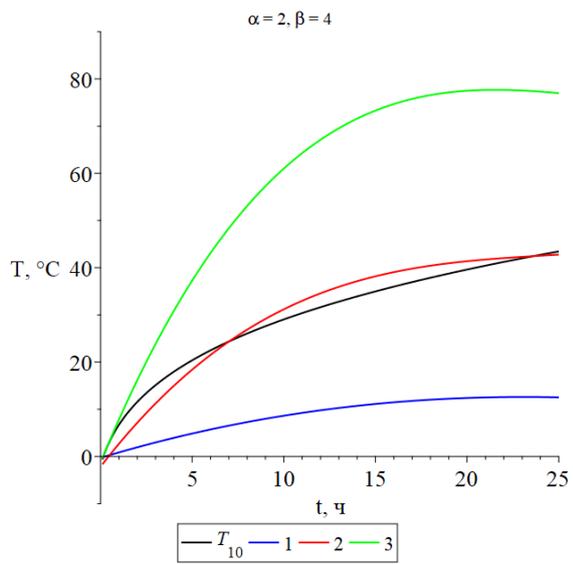


Рис. 8

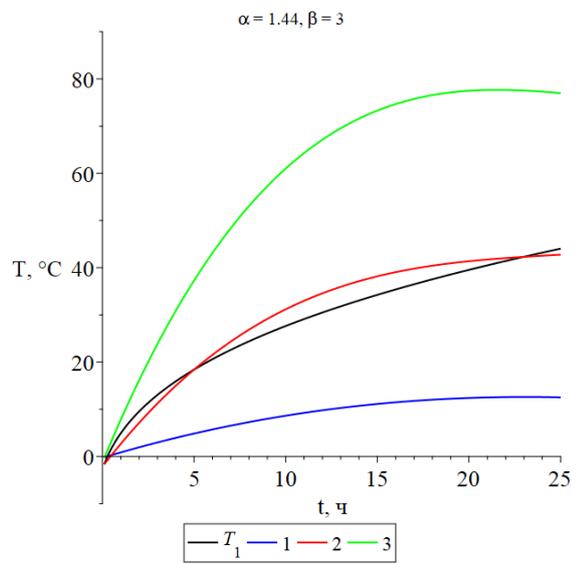


Рис. 9

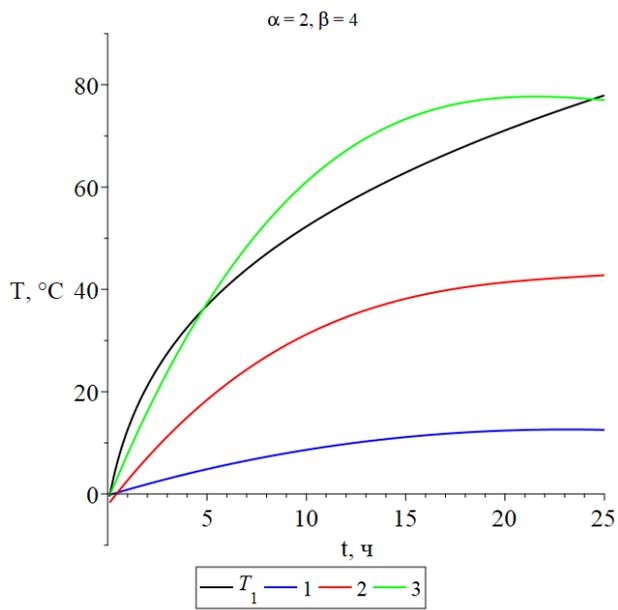


Рис. 10

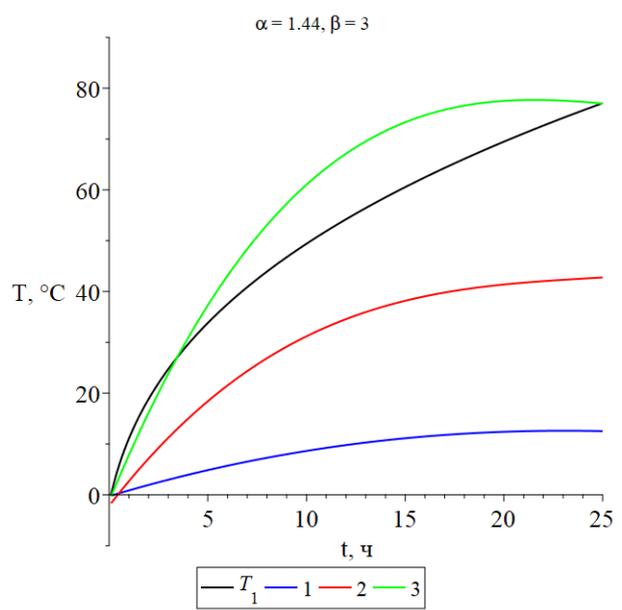


Рис. 11

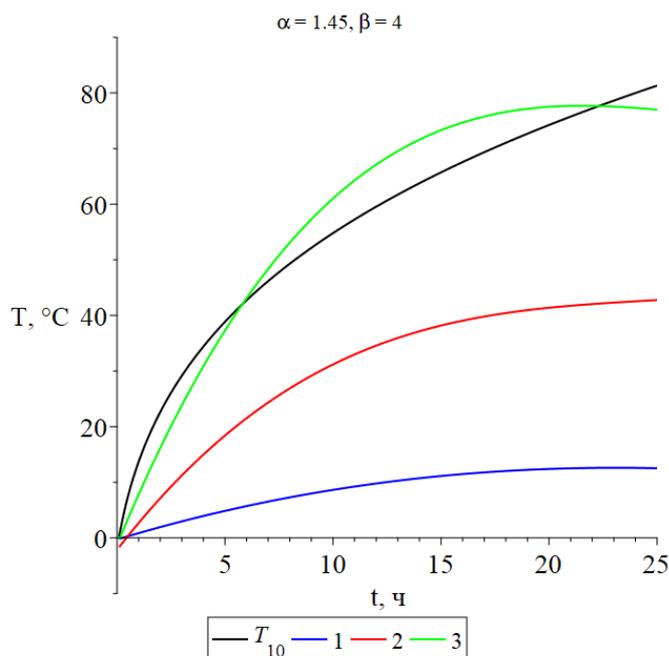


Рис. 12

## 6. Заключение

На основании полученных данных было выявлено следующее:

1. Принятые для исследования две подмодели точного решения нелинейного дифференциального уравнения, описывающего нелинейный процесс распространения тепла в неоднородном стержне при наличии нестационарного источника тепла, и полученные на их основе расчетные формулы показывают хорошую аппроксимацию с практическими результатами;
2. Наиболее точное описание получилось для случая малой и средней мощности;
3. Доказана эффективность использования подмоделей, найденных методами группового анализа дифференциальных уравнений.

## Библиографический список

1. Луцкой С.Я. и др. *Технология строительного производства. Справочник*. М.: Высшая школа. 1991. – 384 с.
2. Арбеньев А.С., Лысов В.П. *Определение времени остывания бетона при зимнем бетонировании // Бетон и железобетон*. 1971. № 6. С. 6–8.
3. Кириенко И.А. *Бетонные, каменные и штукатурные работы на морозе*. Киев: Госстройиздат УССР. 1962. – 272 с.
4. Савалов И.Г. *Бетонные работы*. М.: Стройиздат, 1952.
5. Кондратьев Г.М. *Регулярный тепловой режим*. М.: ГИТТЛ. 1954. – 408 с.
6. Попов Ю.А., Лунев Ю.В., Шалгунова О.А., *Математическое моделирование динамики температурного и прочностного полей при дифференцированном прогреве бетона в строительных конструкциях призматической формы*. // *Изв. вузов. Стр-во*. 2005. № 4. – С. 73–78.
7. Молодин В.В., Лунев Ю.В. *Бетонирование монолитных строительных конструкций в зимних условиях*. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин). 2006. – 300 с.
8. Чиркунов Ю.А. *Нелинейное распространение тепла в неоднородном стержне при воздействии нестационарного источника тепла применительно к задачам зимнего бетонирования*. // *Изв. вузов. Стр-во*. 2018. № 2. – С. 70–76.
9. Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. *Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды*. Новосибирск: НГТУ. 2012. – 659 с.