DOI: 10.33942/sit1808 **УДК 517.983**

ЖАКЫНДАШТЫРЫЛЫП БЕРИЛГЕН СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ОПЕРАТОРЛУУ БИРИНЧИ ТЕКТЕГИ ОПЕРАТОРДУК ТЕНДЕМЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫН ТУРГУЗУУ

Сабиров Я.А.[1], Абдылдаева А.Р.[2]

[1]*ЭИТУ СТПИ доценти, e-mail:* Sabirovj67@ mail.ru
[2]*И. Раззаков атындагы КМТУ доцент, 720044, г. e-mail: asabdyl_72@mail.ru*

Аннотация. *Бул иште Лаврентьев методун колдонуп, биринчи типтеги оператордук теңдемесинин болжолдуу чыгарылышы алынган. Болжолдуу чыгарылышы так оң жагына жакын жерде курулган. Сызыктуу эмес теңдемени кандайдыр бир берилген элемент үчүн чыгаруунун уникалдуулугу далилденген. Болжолдуу чыгарылышы баштапкы теңдеменин такчыгарылышына жакындашуусу далилденген.*

Ачкыч создор. *Сызыктуу эмес оператор,калыптандыруучу оператор, Липшицанын шарты,тескери оператор, оператордук тендеме,сызыктуу эмес оператордук тендеме.*

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ПРИБЛИЖЕННЫМ ЗАДАННЫМ НЕЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Сабиров Я.А.[1], Абдылдаева А.Р.[2]

[1]*доцент, МУИТ, Кыргызстан,720048, г. Бишкек, e-mail:* Sabirovj67@ mail.ru
[2]*доцент, КГТУ им. И. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Ч. Айтматова 66, e-mail:asabdyl_72@mail.ru*

Аннотация. *В данной работе, применяя метод Лаврентьева, получено приближенное решение операторного уравнения первого рода. Построено приближенное решение в* δ *окрестности точной правой части* u_0. *Доказана единственность решения нелинейного уравнения при любом заданном элементе* $u \in H$. *Доказана сходимость приближенного решения к точному решению исходного уравнения при* $\delta \to 0$.

Ключевые слова. *Нелинейный оператор, регулирующий оператор, условие Липшица, обратный оператор, операторное уравнение, нелинейное операторное уравнение.*

BUILDING A SOLUTION OF A OPERATOR EQUATION OF THE FIRST KIND WITH AN APPROXIMATE NONLINEAR OPERATOR

Sabirov J.A.[1], Abdyldaeva A.R.[2]

[1]*Kyrgyzstan, 720048, c. Bishkek, e-mail: Sabirovj67@ mail.ru*
[2]*Kyrgyzstan, 720044, c. Bishkek, KSTU named after I.Razzakov, e-mail: asabdyl_72@mail.ru*

Annotation. *In this work, using the Lavrentiev’s method, an approximate solution of the operator equation of the first kind is obtained. An approximate solution is constructed in the* δ *neighborhood of the exact right-hand side* u_0. *The uniqueness of the solution of the nonlinear*

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор ИЦТП МУИТ Кененбаева Г.М.

equation for any given element $u \in H$ is proved. The convergence of the approximate solution to the exact solution of the original equation for $\delta \to 0$ is proved.
Keywords. *Nonlinear operator, regularizing operator, Lipschitz's condition, inverse operator, operator equation, nonlinear operator equation.*

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение в Гильбертовом пространстве

$$Kz = u, \tag{1}$$

где K - нелинейный оператор, действующий из H в H,

u -заданный элемент,

z -искомый элемент.

Допустим, что оператор K представим в виде

$$K = AK_1, \tag{2}$$

где K_1 нелинейный оператор, удовлетворяющий условию Липшица, т.е.

$$\|K_1 z_2 - K_1 z_1\| \le N \|z_2 - z_1\|, \tag{3}$$

A - линейный вполне непрерывный линейный оператор.

Предположим, что при $u = u_0$ уравнение (1) имеет точное решение $z_0 \in H$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение второго рода

$$\alpha z_\alpha + K z_\alpha = u. \tag{4}$$

Пусть вместо оператора K задан оператор K_h, удовлетворяющий условию

$$K_h = K + hK_2, \tag{5}$$

где K_2 - удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$\|K_2 z_2 - K_2 z_1\| \le N_1 \|z_2 - z_1\|. \tag{6}$$

Рассмотрим уравнение, когда вместо оператора K задан оператор K_h, представимый в виде (5)

$$K_h z = u. \tag{7}$$

В силу некорректности решения уравнения (7), рассмотрим уравнение второго рода с малым параметром $\alpha > 0$.

$$\alpha z_\alpha^h + K_h z_\alpha^h = u. \tag{8}$$

Покажем, что уравнение (8) при любом $u \in H$ и некоторой зависимости параметра регуляризации α от h уравнение (8) имеет единственное решение.

Учитывая (5), уравнение (8) запишем в виде

$$\alpha z_\alpha^h + K z_\alpha^h + hK_2 z_\alpha^h = u. \tag{9}$$

В силу (2), из (9) получаем

$$\alpha z_\alpha^h + A z_\alpha^h + A\left(K_1 - E\right) z_\alpha^h + hK_2 z_\alpha^h = u. \tag{10}$$

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор ИЦТП МУИТ Кененбаева Г.М.

Оператор

$$\left(\alpha E + A\right)$$

имеет обратный оператор

$$\left(\alpha E + A\right)^{-1},$$

причем норма этого оператора при $\alpha > 0$ ограничена

$$\left\|\left(\alpha E + A\right)^{-1}\right\| \le \frac{1}{\alpha}. \qquad (11)$$

Тогда нелинейное уравнение (10) эквивалентно следующему уравнению

$$\begin{aligned} z_\alpha^h &= -\left(\alpha E + A\right)^{-1} A\left(K_1 - E\right) z_\alpha^h - \\ &-h\left(\alpha E + A\right)^{-1} K_2\, z_\alpha^h + \left(\alpha E + A\right)^{-1} u. \end{aligned} \qquad (12)$$

Нелинейный оператор

$$\left(\alpha E + A\right)^{-1} A\left(K_1 - E\right) = P_\alpha$$

удовлетворяет условию Липшица с постоянной N в неравенстве (3).

Допустим, что постоянная N удовлетворяет условию

$$N < 1. \qquad (13)$$

Тогда в силу принципа сжимающих отображений [2] оператор

$$E + \left(\alpha E + A\right)^{-1} A\left(K - E\right)$$

обратим.

Уравнение (12) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} z_\alpha^h &= \left(E + \left(\alpha E + A\right)^{-1} A\left(K - E\right)\right)^{-1}\left(-h\left(\alpha E + A\right)^{-1} K_2 z_\alpha^h\right) + \\ &+\left(E + \left(\alpha E + A\right)^{-1} A\left(K - E\right)\right)^{-1}\left(\alpha E + A\right)^{-1} u. \end{aligned} \qquad (14)$$

Нелинейный оператор

$$\left(E + \left(\alpha E + A\right)^{-1} A\left(K - E\right)\right)^{-1}$$

удовлетворяет условию Липшица, т.е. имеет место неравенство

$$\begin{aligned} &\left\|\left(E + \left(\alpha E + A\right)^{-1} A\left(K - E\right)\right)^{-1} z_1 - \left(E + \left(\alpha E + A\right)^{-1} A\left(K - E\right)\right)^{-1} z_2\right\| \le \\ &\le \frac{1}{1 - N}\left\|z_1 - z_2\right\|. \end{aligned} \qquad (15)$$

Покажем, что нелинейный оператор

$$-h\left(E + \left(\alpha E + A\right)^{-1} A\left(K - E\right)\right)^{-1}\left(\alpha E + A\right)^{-1} K_2 z = G_\alpha z$$

удовлетворяет условию Липшица.

Действительно

$$\left\| h\left(E+(\alpha E+A)^{-1}A(K-E)\right)^{-1}(\alpha E+A)^{-1}K_2z_2 - \right.$$

$$\left. -h\left(E+(\alpha E+A)^{-1}A(K-E)\right)^{-1}(\alpha E+A)^{-1}K_2z_1 \right\| \le$$

$$\le h\frac{1}{1-N}\left\|(\alpha E+A)^{-1}(K_2z_2-K_2z_1)\right\| \le \frac{h}{1-N}\cdot\frac{1}{\alpha}N_1\|z_2-z_1\|. \qquad (16)$$

Здесь мы использовали неравенства (15), (11) и условие (6).

Постоянная Липшица для данного оператора $G_\alpha z$ равна

$$\frac{h}{\alpha}\cdot\frac{N_1}{1-N}=N_2. \qquad (17)$$

Регуляризующий оператор α зависит от h,так чтобы

$$\frac{h}{\alpha(h)}\to 0 \text{ при } h\to 0. \qquad (18)$$

При этих условиях существует такое h_0, что для любого $h<h_0$

$$N_2<1. \qquad (19)$$

Тогда в силу теоремы Банаха [1] оператор

$$(E-G_\alpha)$$

имеет обратный оператор

$$(E-G_\alpha)^{-1}.$$

Этот нелинейный оператор удовлетворяет условию Липшица

$$\left\|(E-G_\alpha)^{-1}z_2-(E-G_\alpha)^{-1}z_1\right\| \le \frac{1}{1-N_2}\|z_2-z_1\|. \qquad (20)$$

Решение нелинейного уравнения (14) представимо в виде

$$z_\alpha^h=(E-G_\alpha)^{-1}(E-P_\alpha)^{-1}(\alpha E+A)^{-1}u. \qquad (21)$$

Доказана

Теорема1. Пусть выполнены следующие условия:

1) нелинейный оператор в пространстве H представим в виде (2), где A - нелинейный положительный вполне непрерывный оператор;

2) оператор K_1 удовлетворяет условию Липшица с постоянной N, причем $N<1$;

3) вместо оператора K задан оператор K_h, представимый в виде (5), где K_2 - нелинейный оператор, определенный в пространстве H и удовлетворяющий условию Липшица с постоянной N_1.

Тогда при

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{\alpha(h)}=0 \text{ и } h<h_0$$

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор ИЦТП МУИТ Кененбаева Г.М.

нелинейное уравнение (8) имеет единственное решение при любом заданном элементе $u \in H$ и это решение представимо в виде (21).

Покажем, что решение уравнения (8) является близким по норме к точному решению уравнения (1), т.е.

$$z_\alpha \to z_0 \quad \text{при}\, \alpha \to 0$$

по норме пространства H.

Рассмотрим разность

$$z_\alpha^{h,0} - z_\alpha^0, \tag{22}$$

где $z_\alpha^{h,0}$ - решение уравнения (8) при $u = u_0$,

z_α^0 -решение уравнения (4) при $u = u_0$.

Полагая $u = u_0$ и вычитая из (21) решение уравнения (4) при $u = u_0$, получаем

$$z_\alpha^{h,0} - z_\alpha^0 = \left(E - G_\alpha\right)^{-1}\left(E - P_\alpha\right)^{-1}\left(\alpha E + A\right)^{-1} u_0 -$$
$$-\left(E - P_\alpha\right)^{-1}\left(\alpha E + A\right)^{-1} u_0.$$

Отсюда

$$z_\alpha^{h,0} - z_\alpha^0 = \left(E - G_\alpha\right)^{-1}\Big(\left(E - P_\alpha\right)^{-1}\left(\alpha E + A\right)^{-1} u_0 -$$
$$-\left(E - G_\alpha\right)\left(E - P_\alpha\right)^{-1}\left(\alpha E + A\right)^{-1} u_0\Big).$$

Переходя к норме из предыдущего равенства, преобразуя выражение в скобке, приходим к следующему выражению

$$\left\| z_\alpha^{h,0} - z_\alpha^0 \right\| = \left\| \left(E - G_\alpha\right)^{-1} G_\alpha \left(E - P_\alpha\right)^{-1}\left(\alpha E + A\right)^{-1} u_0 \right\|.$$

Используя тождество

$$AK_1 z_0 = u_0$$

из предыдущего равенства получаем

$$\left\| z_\alpha^{h,0} - z_\alpha^0 \right\| = \left\| \left(E - G_\alpha\right)^{-1} G_\alpha \left(E - P_\alpha\right)^{-1}\left(\alpha E + A\right)^{-1} AK_1 z_0 \right\|.$$

В предыдущем равенстве внутри нормы стоит суперпозиция нелинейных операторов, каждая которых удовлетворяет условию Липшица. Тогда это суперпозиция также удовлетворяет условию Липшица, причем постоянная Липшица является произведением постоянных Липшиц каждого оператора.

Предыдущее равенство преобразуем следующим образом

$$\left\|z_\alpha^{h,0}-z_\alpha^0\right\| \le \left\|\left(E-G_\alpha\right)^{-1} G_\alpha\left(E-P_\alpha\right)^{-1}\left(\alpha E+A\right)^{-1} AK_1 z_0 -\right.$$
$$-\left(E-G_\alpha\right)^{-1} G_\alpha\left(E-P_\alpha\right)^{-1}\left(\alpha E+A\right)^{-1} AK_1(0)+$$
$$\left.+\left(E-G_\alpha\right)^{-1} G_\alpha\left(E-P_\alpha\right)^{-1}\left(\alpha E+A\right)^{-1} AK_1(0)\right\| \le \tag{23}$$
$$\le \frac{1}{1-N_2} N_2 \frac{1}{1-N_1} N\left\|z_0\right\| + \frac{N_2}{1-N_2}\frac{N}{1-N_1}\left\|K_1(0)\right\|,$$

где постоянная N_2 в силу (18) стремится к нулю при $h\to 0$.

Далее оценим разность $z_\alpha^{h,0}-z_0$ по норме.

Используя неравенство треугольника, получаем

$$\left\|z_\alpha^{h,0}-z_0\right\| \le \left\|z_\alpha^{h,0}-z_\alpha^0\right\| + \left\|z_\alpha^0-z_0\right\|. \tag{24}$$

Элемент z_α^0 есть решение уравнения (4) при $u=u_0$ и он представим виде

$$z_\alpha^0 = \left(E-P_\alpha\right)^{-1}\left(\alpha E+A\right)^{-1} u_0.$$

Тогда для разности $z_\alpha^0-z_0$ имеем

$$\left\|z_\alpha^0-z_0\right\| = \left\|\left(E-P_\alpha\right)^{-1}\left(\alpha E+A\right)^{-1} AK_1 z_0 - z_0\right\| =$$
$$= \left\|\left(E-P_\alpha\right)^{-1}\left(\alpha E+A\right)^{-1}\Big(AK_1 z_0 - \left(\alpha E+A\right)^{-1}\left(E-P_\alpha\right)\Big) z_0\right\|.$$

Разность в норме преобразуется следующим образом

$$AK_1 - \left(\alpha E+A\right)\left(E-P_\alpha\right) = AK_1 - \left(\alpha E+A\right) +$$
$$+\left(\alpha E+A\right)\Big(\left(\alpha E+A\right)^{-1} A\left(K_1-E\right)\Big) =$$
$$= AK_1 - \left(\alpha E+A\right) - A\left(K_1-E\right) =$$
$$= AK_1 - \alpha E - A - AK_1 + A = -\alpha E.$$

Используя это, из предыдущего равенства получаем [3]

$$\left\|z_\alpha^0-z_0\right\| = \left\|\left(E-P_\alpha\right)^{-1}\left(\alpha E+A\right)^{-1}\left(-\alpha z_0\right)\right\| =$$
$$= \alpha\left\|\left(E-P_\alpha\right)^{-1}\left(\alpha E+A\right)^{-1} z_0\right\|.$$

Так как оператор $\left(E-P_\alpha\right)^{-1}$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\dfrac{1}{1-N}$, тогда из предыдущего равенства получаем

$$\left\|z_\alpha^0-z_0\right\| \le \frac{\alpha}{1-N}\left\|\left(\alpha E+A\right)^{-1} z_0\right\| + \frac{\alpha}{1-N}\left\|K_1(0)\right\|. \tag{25}$$

Предположим, что точное решение уравнения (1) представимо в виде

$$z_0 = A^\sigma \vartheta_0, \qquad 0<\sigma<1, \qquad \vartheta_0 \in H. \tag{26}$$

Тогда справедлива следующая оценка

$$\alpha\left\|\left(\alpha E+A\right)^{-1} A^\sigma \vartheta_0\right\| \le \alpha^\sigma C_0, \tag{27}$$

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор ИЦТП МУИТ Кененбаева Г.М.

где C_0 - некоторая постоянная.

Учитывая это из неравенства (25), получаем оценку

$$\left\| z_\alpha^0 - z_0 \right\| \le \frac{\alpha C_1}{1-N}. \qquad (28)$$

В силу неравенств (23), (28) из неравенства (24), приходим к следующему неравенству

$$\left\| z_\alpha^{h,0} - z_0 \right\| \le \frac{h}{\alpha} C_2 + C_3 \alpha^\sigma, \qquad (29)$$

где $C_2 = \dfrac{N}{1-N_2} \cdot \dfrac{N_1}{\left(1-N_1\right)^2}$, $\qquad C_3 = \dfrac{C_1}{1-N}$.

Правая часть неравенства (29) достигается минимума при

$$\alpha\left(h\right) = \left(\frac{hC_2}{\sigma C_3}\right)^{\frac{1}{1+\sigma}}.$$

Тогда, подставляя это значение в правую часть неравенства (29) получаем следующую оценку

$$\left\| z_\alpha^{h,0} - z_0 \right\| \le K_0 h^{\frac{\sigma}{\sigma+1}},$$

где K_0 - некоторая постоянная.

Таким образом доказана

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1.

Тогда решение уравнения (8) сходится по норме пространства H к точному решению уравнения (1) при $\alpha\left(h\right) = \left(\dfrac{hC_2}{\sigma C_3}\right)^{\frac{1}{1+\sigma}}$ и при $h \to 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. ***Лаврентьев, М. М.*** *О некоторых некорректных задачах математической физики [Текст] / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния АН СССР, 1962. – 92с.*
2. ***Люстерник, Л. А.*** *Элементы функционального анализа [Текст] / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Наука, 1965.– 513с.*
3. ***Саадабаев, А. С.*** *Приближенные методы решения нелинейных интегральных и операторных уравнений первого рода [Текст] / А.С. Саадабаев. – Бишкек: [б.и.], 1997. – 218 с.*
4. ***Байышов Э.Н., Бердыбаева М.Т., Садыков М.А.*** *Один из способов повышения энергоэффективности здания за счет использования солнечной энергии. Наука и инновационные технологии. 2017. № 3 (3). С. 72-77.*
5. *Кененбаева Г.М., Аскарова Ч.Т., Сейитбекова Н.У. Компьютерное моделирование анализа возможных аварий. Наука и инновационные технологии. №4(14). 2020, С. 118-125*

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор ИЦТП МУИТ Кененбаева Г.М.