DOI: 10.33942/sit1900 **УДК 519.683.5**

БИРИНЧИ ТЕКТЕГИ АЙКЫН ЭМЕС ОПЕРАТОРДУК ТЕНДЕМЕ

Усенов И.А.[1], Асанбеков А.[2]

[1] Ж. Баласагына атындагы КУУнун дифференциальдык теңдемелер кафедрасынын профессору, ф.-м.и.к., iausen@mail.ru
[2]Ж. Баласагына атындагы КУУнун дифференциальдык теңдемелер кафедрасынын магистранты, asanbekov_aman@mail.ru

Аннотация. *Биринчи тектеги айкын эмес оператордук тендеменин классы гильберт мейкиндигинде изилденген. Бул теңдеменин чыгарылышы үчүн регуляризация оператору тургузулган. Каталыктын жана регуляризация параметирлеринин ортосундагы байланыш табылды. Регуляризацияланган чыгарылыштын берилген теңдеменин так чыгарылышына жыйналуучулугунун ылдамдыгы аныкталды.*
Түйүндүү сөздөр. *Операторлук тендеме, калыптандыруучу оператор, жыйналуучулук, биринчи тектеги тендеме.*

НЕЯВНОЕ ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА

Усенов И.А.[1], Асанбеков А.[2]

[1]профессор кафедры дифференциальных уравнений КНУ им. Ж. Баласагына, к. ф.- м. н., iausen@mail.ru
[2]магисрант кафедры дифференциальных уравнений КНУ им. Ж. Баласагына asanbekov_aman@mail.ru

Аннотация. *В Гильбертовом пространстве исследован класс неявного операторного уравнения первого рода. Для решения данного класса уравнения построен регуляризирующий оператор. Произведен выбор параметра регуляризации от погрешностей. Получена скорость сходимости регуляризированного решения к точному решению исходного уравнения.*
Ключевые слова*: Операторное уравнение, регуляризация, сходимость, уравнение первого рода.*

IMPACT OPERATOR EQUATION OF THE FIRST KIND

Usenov I.A.[1], Asanbekov A.[2]

[1]Professor of the Department of Differential Equations, KNU named after J. Balasagyn, Ph.D., iausen@mail.ru
[2]Master's student of the Department of Differential Equations of the KNU named after J. Balasagyn asanbekov_aman@mail.ru

Annotation. *The class of implicit operator equation of the first kind is investigated in Hilbert space. A regularizing operator is constructed to solve this class of equation. The choice of the regularization parameter from errors has been made. The rate of convergence of the regularized solution to the exact solution of the original equation is obtained.*
Key words: *Operator equation, regularization, convergence, equation of the first kind.*

Введение

В работе В.П. Танана [4] построено приближенное решение неявных операторных уравнений первого рода методом регуляризации А.Н. Тихонова в пространстве $U \times F$, где U-пространство Ефимова-Стечкина, F-рефлексивное банахово пространство, когда область определения неявного оператора является слабо замкнутой. Получена β- сходимость между множеством регуляризированного и точного решения.

В данной работе исследуется вопрос регуляризируемости решения неявного операторного уравнения первого рода в пространстве гильберта комбинированным методом регуляризации.

Регуляризация

Рассмотрим неявное уравнение первого рода относительно z вида

$$\Phi(z,u) \equiv \int_0^1 (t-s)u(s)z^2(s)ds - t + \frac{4}{5} = 0. \qquad (1)$$

Введем обозначение шара $S(z_0,r) = \{z : \|z - z_0\| \le r_z\}$.

Оператор $\Phi(z,u)$ определен в некоторой окрестности точки (z_0,u_0) и

$$\Phi(z_0,u_0) \ne 0. \qquad (2)$$

Поэтому точка (z_0,u_0) выбирается так, чтобы значения оператора $\Phi(z_0,u_0)$ было достаточно близко к нулю.

Для данного уравнения выбираем точку $z_0 = 1{,}61,\ u_0 = 0{,}8,\ t_0 = 0{,}8$. Вычислим значения оператора $\Phi(z_0,u_0)$

$$\Phi(z_0,u_0) = \int_0^1 (t_0 - s)0{,}8(1{,}61)^2 ds - t_0 + \frac{4}{5} = 0{,}622104\ .$$

Оператор $\Phi(z,u)$ имеет производную Фреше, непрерывную в точке (z_0,u_0).

$$\Phi'_z(z_0,u_0)h \equiv 2u_0z_0\int_0^1 (t-s)h(s)ds = 2{,}576\int_0^1 (t-s)h(s)ds. \qquad (3)$$

Производная оператора $\Phi(z,u)$ не является симметричной.

Предполагаем, что при $u(t) = u^*(t)$ существует единственное решение $z^*(t)$ уравнения (1), т.е. имеет место тождество

$$\Phi(z^*,u^*) \equiv \int_0^1 (t-s)u^*(s)z^{*2}(s)ds - t + \frac{4}{5} \equiv 0. \qquad (4)$$

В точке $(z_\alpha(u_0),u_0)$ рассмотрим оператор $\Phi'_z(z_\alpha(u_0),u_0)h \equiv k_0\int_0^1 (t-s)h(s)ds$

где $k_0 = 2u_0z_\alpha(u_0)$. Сопряженный этому оператору имеет вид

$$\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)h \equiv k_0\int_0^1 (s-t)h(s)ds\,.$$

Рассмотрим неявное нелинейное операторное уравнение первого рода относительно z вида

$$\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi(z^\alpha,u) = \int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}+\left(s-\frac{1}{2}\right)t\right)u(s)z^2(s)ds-\frac{3}{10}t+\frac{1}{15}=0\,. \qquad (1^*)$$

Уравнения (1) и (1^*) являются эквивалентными.

Наряду с уравнением (1^*) рассмотрим уравнение второго рода вида

$$\alpha z_\alpha(t)+\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}+\left(s-\frac{1}{2}\right)t\right)u(s)z_\alpha^2(s)ds-\frac{3}{10}t+\frac{1}{15}=0, \qquad (5)$$

где $\alpha>0$ - параметр регуляризации.

Уравнение (5) решаем в окрестности точки

$$(z_\alpha(u_0),u_0)=\left(\frac{-12\alpha+\sqrt{144\alpha^2+4u_0\left(\frac{18}{5}u_0-\frac{4}{5}\right)}}{2u_0},u_0\right),$$

где $\alpha z_\alpha(u_0)+\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi(z_\alpha(u_0),u_0)\equiv 0$.

Уравнение (5) эквивалентно запишем в виде

$$z_\alpha = z_\alpha-(\Phi_2[\tau])^{-1}\left(\alpha z_\alpha+\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi(z^\alpha,u)\right). \qquad (6)$$

Обратный оператор $(\Phi_2[\tau])^{-1}$ имеет вид

$$(\Phi_2[\tau])^{-1}=(E+\Psi[\tau])^{-1}\left(\alpha E+\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0),u_0)\right)^{-1}, \qquad (7)$$

где

$$\begin{aligned}\Psi[\tau]=&\left(\alpha E+\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0),u_0)\right)^{-1}\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\cdot\\ &\cdot\left(\Phi_z'(z_\alpha(u_0)+\tau(z-z_\alpha(u_0)),u_0)-\Phi_z'(z_\alpha(u_0),u_0)\right).\end{aligned} \qquad (8)$$

Учитывая представления (6) найдем обратный оператор $\left(\alpha E+\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0),u_0)\right)^{-1}$. Для этого решим линейное уравнение вида

$$\alpha h_\alpha(t)+k_0\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}+\left(s-\frac{1}{2}\right)t\right)h_\alpha(s)ds=f(t). \qquad (9)$$

Введем обозначения

$$c_1=k_0\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}\right)h_\alpha(s)ds,\qquad c_2=k_0\int_0^1\left(s-\frac{1}{2}\right)h_\alpha(s)ds\,. \qquad (10)$$

Тогда формальное решение уравнения (9) запишется в виде

$$h_\alpha(t)=\frac{f(t)-c_1-c_2t}{\alpha}. \qquad (11)$$

Для того чтобы найти постоянные c_1, c_2 формулу (11) подставим в (10) и после вычислений, имеем

$$c_1=\frac{12k_0}{k_0+12\alpha}\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}\right)f(s)ds, \qquad c_2=\frac{12k_0}{k_0+12\alpha}\int_0^1\left(s-\frac{1}{2}\right)f(s)ds. \qquad (12)$$

Тогда решение уравнения (9), имеет вид

$$z_\alpha(t)=\frac{1}{\alpha}f(t)-\frac{12k_0}{\alpha(k_0+12\alpha)}\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}+\left(s-\frac{1}{2}\right)t\right)f(s)ds. \qquad (13)$$

Следовательно, обратный оператор $\left(\alpha E+\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0),u_0)\right)^{-1}$ имеет вид

$$\left(\alpha E+\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0),u_0)\right)^{-1}=\frac{1}{\alpha}-\frac{12k_0}{\alpha(k_0+12\alpha)}\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}+\left(s-\frac{1}{2}\right)t\right)(\cdot)ds. \quad (14)$$

Уравнение (6) при $u(t)=u^*(t)$ запишется в виде

$$z_\alpha(t)=\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{12k_0}{\alpha(k_0+12\alpha)}\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}+\left(s-\frac{1}{2}\right)t\right)(\cdot)ds\right)*$$
$$*\left[k_0\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}+\left(s-\frac{1}{2}\right)t\right)z_\alpha(s)ds-\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}+\left(s-\frac{1}{2}\right)t\right)u(s)z_\alpha^2(s)ds+\frac{3}{10}t-\frac{1}{15}\right] \qquad (15)$$

После проделанных преобразований из (15), имеем

$$z_\alpha(t)=\frac{12k_0}{k_0+12\alpha}\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}+\left(s-\frac{1}{2}\right)t\right)z_\alpha(s)ds-$$
$$-\frac{12}{k_0+12\alpha}\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}+\left(s-\frac{1}{2}\right)t\right)u(s)z_\alpha^2(s)ds+\frac{12}{k_0+12\alpha}\left(\frac{3}{10}t-\frac{1}{15}\right). \qquad (16)$$

Вычислим предел параметра k_0 при $\alpha\to 0$ т.е.

$$\lim_{\alpha\to 0}k_0=\lim_{\alpha\to 0}2u_0\frac{-12\alpha+\sqrt{144\alpha^2+4u_0\left(\frac{18}{5}u_0-\frac{4}{5}\right)}}{2u_0}=2\sqrt{\frac{(18u_0-4)u_0}{5}}.$$

Предел функции $z_\alpha(t)$ при $\alpha\to 0$ обозначим через $z^*(t)$.

Переходим к пределу в (16) при $a\to 0$, то получаем

$$z^*(t)=12\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}+\left(s-\frac{1}{2}\right)t\right)z^*(s)ds-12\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}+\left(s-\frac{1}{2}\right)t\right)u(s)z^{*^2}(s)ds+12\left(\frac{3}{10}t-\frac{1}{15}\right). \quad (17)$$

С учетом тождества (4) уравнение (17) запишется в виде

$$z^*(t)=12\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}+\left(s-\frac{1}{2}\right)t\right)z^*(s)ds. \qquad (18)$$

Таким образом, относительно предполагаемого точного решения получили однородное интегральное уравнение второго рода.

Найдем собственные значения и соответствующие собственные функции ядра $K(t,s)=\frac{1}{3}-\frac{s}{2}+\left(s-\frac{1}{2}\right)t$. Для этого рассмотрим уравнение

$$\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}+\left(s-\frac{1}{2}\right)t\right)\varphi(s)ds=\frac{1}{\lambda}\varphi(t)$$

Введем обозначения

$$c_1=\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}\right)\varphi(s)ds,\qquad c_2=\int_0^1\left(s-\frac{1}{2}\right)\varphi(s)ds. \qquad (19)$$

Тогда формальное решение уравнения (18), имеет вид

$$\varphi(t)=\lambda(c_1+c_2t). \qquad (20)$$

Относительно c_1,c_2 получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_1\left(1-\frac{\lambda}{12}\right)=0,\\ c_2\left(1-\frac{\lambda}{12}\right)=0. \end{cases} \qquad (21)$$

Матрица системы (21), имеет вид

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} 1-\frac{\lambda}{12} & 0\\ 0 & 1-\frac{\lambda}{12} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{12} & 0\\ 0 & 1-\frac{\lambda}{12} \end{vmatrix}=\left(1-\frac{\lambda}{12}\right)^2=0.$$

Следовательно, оператор имеет кратные собственные значения $\frac{1}{\lambda_{1,2}}=\frac{1}{12}$.

Вычислим ранг матрицы $A-12E$, т.е. $rang(A-12E)=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$.

Зная ранг матрицы, найдем количество собственных функций $n-rang(A-12E)=2-0=2$. Следовательно, матрица имеют простую структуру, т.е. существуют две различные собственные функции $\varphi_1(t)=\lambda_1(a+bt)$, $\varphi_2(t)=\lambda_2(c+dt)$, где a,b,c,d неизвестные коэффициенты.

По разложению

$$z^*(t)=z_1\varphi_1(t)+z_2\varphi_2(t), \qquad (22)$$

где $z_{1_1}=\int_0^1\varphi_1(s)z^*(s)ds=\int_0^1(a+bs)z^*(s)ds,\quad z_{2_2}=\int_0^1\varphi_2(s)z^*(s)ds=\int_0^1(c+ds)z^*(s)ds$.

Тогда

$$z^*(t)=144\int_0^1 (a+bs)(a+bt)z^*(s)ds+144\int_0^1 (c+ds)(c+dt)z^*(s)ds=\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{2}+st-\frac{t}{2}\right)z^*(s)ds \quad (23)$$

Приравнивая коэффициенты, относительно неизвестных коэффициентов a,b,c,d, имеем систему

$$\begin{cases}144\left(a^2+b^2\right)=\frac{1}{3},\\ 144\left(d^2+b^2\right)=1,\\ 144(ab+cd)=-\frac{1}{2}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{12\sqrt{3}},\\ c=0\\ b=-\frac{\sqrt{3}}{24},\\ d=\frac{1}{24}.\end{cases}$$

Тогда собственные функции имеют вид

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}t,\qquad \varphi_2(t)=\frac{1}{2}t\ .$$

Таким образом, предельное уравнение (18) имеет бесконечное множество ненулевых решений.

По определению решение уравнения (18) является решением уравнения (1). Решение $z^*(t)=12(c_1+c_2t)$, подставляя в исходное уравнение, выбираем значения произвольных постоянных величин

$$\Phi(z^*,u^*)\equiv\int_0^1 (t-s)\frac{s}{2}\left(12(c_1+c_2s)\right)^2 ds-t+\frac{4}{5}\equiv 0\cdot$$

Постоянные величины c_1, c_2 определяются из системы

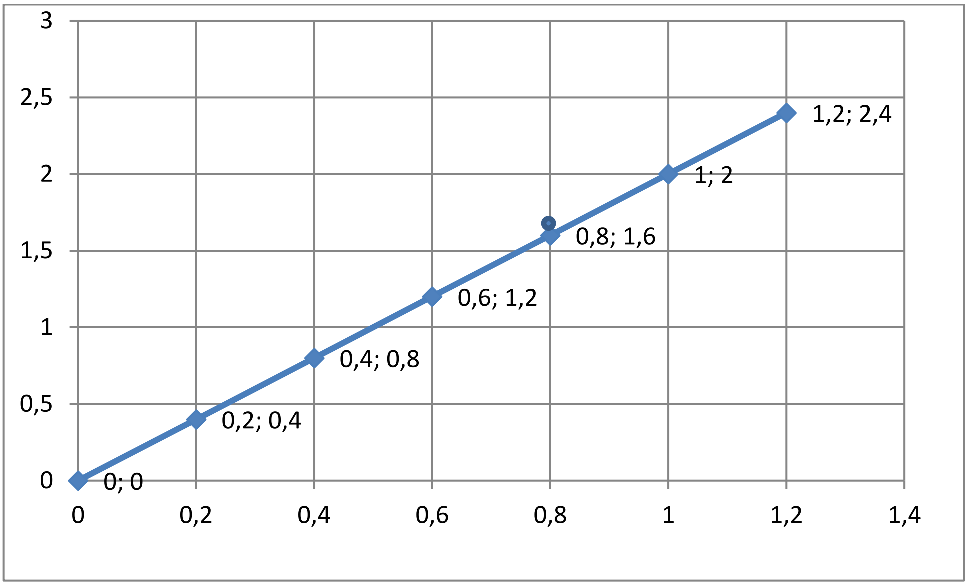
$$\begin{cases}\frac{c_1^2}{2}+\frac{2c_1c_2}{3}+\frac{c_2^2}{4}=\frac{1}{144},\\ \frac{c_1^2}{3}+\frac{2c_1c_2}{4}+\frac{c_2^2}{5}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{144},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=0,\\ c_2=\pm\frac{1}{6}.\end{cases}$$

Тогда уравнение (17) имеет решение $z^*(t)=\pm 2t$.

Таким образом, при $u^*(t)=t$ исходное уравнение в окрестности точки (z_0,u_0) имеет единственное непрерывное решение

$$z^*(t)=2t\ . \qquad (22)$$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию полученного решения уравнения (1)



Вычислим расстояние от точки (z_0, u_0) до решения

$$d = \frac{|2u_0 - z_0|}{\sqrt{5}} = \frac{|2 \cdot 0{,}8 - 1{,}61|}{\sqrt{5}} \approx 0{,}0044721 \ .$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ***Hadamard J. Le*** *problеme de Cauchy et les equations aux dirivees partielles linlaires hyperboliques //Paris , Hermann, 1932.*
2. ***Лаврентьев М.М.*** *О некоторых некорректных задачах математической физики-Новосибирск, 1962.*
3. ***Тихонов А.Н., Арсенин В.В.*** *Методы решения некорректных задач.-М.: Наука,1986.*
4. ***Танана В.П.*** *Методы решения операторных уравнений - М.: Наука, 1981.*
5. ***Саадабаев А.С.*** *Сходимость метода Ньютона в нелинейных некорректных задачах // Известия Вузов № 1-2, Бишкек-2003.*
6. ***Усенов И.А.*** *Построение регуляризирующих операторов для решения нелинейных операторных уравнений // диссер. кандид. наук., Бишкек: 1999. 108с.*
7. ***Усенов И.А*** *Приближенное решение неявного операторного уравнения первого рода, когда производная оператора является неположительным оператором // Международный информационный журнал КЭУ «Наука и инновация» Выпуск №1, Бишкек-2013,. стр. 28-35*
8. ***Канторович Л.В., Акилов Г.П.*** *Функциональный анализ-М., Наука, 77.*
9. ***Усенов И.А., Кенжебаев М.К.*** *Регуляризция решения операторного уравнения Гаммерштейна первого рода с приближженным оператором // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2019.№1. С.6-15. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-1-6-15.*
10. ***Саадабаев А.С, Усенов И.А.*** *Регуляризирующий оператор для решения операторного уравнения Гаммерштейна первого рода // Вестник Ошгу, серия “ физики, математики, информационные технологии, экономики,технические науки”, стр. 157-164, Ош-2020.*