DOI: 10.33942/sit2013

ЖЕКЕ ТУУНДУЛАРДАГЫ ЖАЛПЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН БАШТАЛГАН МАСЕЛЕНИН ТУУРАЛЫГЫ

Кененбаева Г.М. [1], Айбек кызы Н. [2], Бодошова С. [3], Рыспеков А.Р.[4]

[1] *Эларалык инновациялык технологиялар унверситетинин Санариптик трансформация жана программалоо институтунун профессору gkenenbaeva@mail.ru*

[2] *Ж.Баласагын атындагы КУУнун "Математика жана информатика" факультетинин 2 курсунун магистранты, gkenenbaeva@mail.ru,*

[3]*Ж.Баласагын атындагы КУУнун "Математика жана информатика" факультетинин 2 курсунун магистранты, sujunbodosova@gmail.com,*

[4]*Эларалык инновациялык технологиялар унверситетинин Санариптик трансформация жана программалоо институтунун 2 курсунун магистранты Argen1307@gmail.com.*

Аннотация: *Буга чейин [1] - [3]- ар кандай ыкмаларды колдонуу менен: аргументтерди трансформациялоо, теңдемелерди кайра түзүү, чечимдерди түрлөндүрүү, сызыктуу жана сызыктуу эмес, скалярдык жана вектордук-матрицалык интегралдык теңдемелердин класстары, анын ичинде Хаммерштейн тибиндеги теңдемелер курулган, бир өзгөрмөнүн аналитикалык функцияларынын класстарындагы туура чечимдер, өзгөрмөнүн реалдуу маанилери үчүн реалдуу.*

Биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелердин аналитикалык функциялардын кээ бир класстарында туура болушу далилденген. Бул макалада жалпы жарым-жартылай дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы маани маселесинин тууралыгы каралат.

Өзөктүү сөздөр: *биринчи түрдөгү интегралдык теңдеме, сызыктуу теңдеме, аналитикалык функция, корректтүүлүк.*

КОРРЕКТНОСТЬ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Кененбаева Г.М. [1], Айбек кызы Н. [2], Бодошова С. [3], Рыспеков А.Р.[4]

[1] *профессор Института Цифровой трансформации и программирования Международного университета инновационных технологий gkenenbaeva@mail.ru,*

[2]*магистрант 2 курса факультета "Математика и информатика" КНУ им. Ж.Баласагына,* gkenenbaeva@mail.ru,

[3]*магистрант 2 курса факультета "Математика и информатика" КНУ им. Ж.Баласагына,* sujunbodosova@gmail.com,

[4]*магистрант 2 курса Института Цифровой трансформации и программирования Международного университета инновационных технологий* Argen1307@gmail.com

Аннотация. *Ранее в [1]-[3] с помощью различных методов: преобразования аргументов, преобразования уравнений, преобразования решений построены классы линейных и нелинейных, скалярных и векторно-матричных интегральных уравнений, в том числе уравнений типа Гаммерштейна, имеющих корректные решения в классах аналитических функций от одной переменной, вещественных для вещественных значений переменной.*

Доказаны, что линейные интегральные уравнения первого рода могут быть корректными в некоторых классах аналитических функций. В данной статье исследуется корректность начальной задачи для общего дифференциального уравнения в частных производных.

Ключевые слова: *интегральное уравнение первого рода, линейное уравнение, аналитическая функция, корректность.*

CORRECTNESS OF THE INITIAL PROBLEM FOR THE GENERAL DIFFERENTIAL EQUATION IN PRIVATE DERIVATIVES

G.M.Kenenbaeva[1], Aibek kyzy N[2], S.Bodoshova[3], A.R.Ryspekov[4]

[1] *Professor, Institute of Digital Transformation and Programming, International University of Innovative Technologies* *gkenenbaeva@mail.ru*

[2] *2nd year undergraduate student of the Faculty of Mathematics and Informatics, KNU named after J. Balasagyn,* *gkenenbaeva@mail.ru*,

[3] *2rd year student of the Faculty of Mathematics and Informatics, KNU named after J. Balasagyn,* *sujunbodosova@gmail.com*,

[4] *2nd year undergraduate student of the Institute of Digital Transformation and Programming of the International University of Innovative Technologies* *Argen1307@gmail.com*

Annotation. *Earlier in [1] - [3], using various methods: transformations of arguments, transformations of equations, transformations of solutions, classes of linear and nonlinear, scalar and vector-matrix integral equations were constructed, including Hammerstein-type equations, which have correct solutions in the classes of analytic functions from one variable, real for real values of a variable.*

It is proved that linear integral equations of the first kind can be correct in some classes of analytic functions. This article examines the correctness of the initial value problem for a general partial differential equation.

Key words: *integral equation of the first kind, linear equation, analytical function, correctness.*

Введение.

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^m u(t,x)}{\partial t^m} = \sum_{j=0}^{q} a_j \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial x^j} + f(x), (\ t \in \Re, x \in \Re), \tag{1}$$

с начальным условием $u(x,0) = \varphi(x)$ $(x \in \mathrm{R})$, (2)

где $a_j \in \Re$ – заданные числа, $f(x)$, $\varphi_k(x)$ – заданные целые аналитические функции, вещественные при вещественном x; $q,m \in N$.

Получим условия для существования аналитического решения (1)-(2) при всех $t \in \Re$.

Формальный ряд для решения. Будем искать решение (1)-(2) в виде

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) t^k, \tag{3}$$

где $u_k(x)$ – искомые целые аналитические функции. (Сходимость этого ряда и рядов, получающихся из него дифференцированием по x и по t, пока не рас-сматривается).

Подставляя (3) в (2) и формально дифференцируя ряд почленно, получаем, что

$$u_k(x) = \varphi_k(x)/k!,\ k=0..m-1. \tag{4}$$

Подставляя (3) в (1) и также формально дифференцируя ряд почленно, получаем

$$\sum_{k=m}^{\infty} u_k(x) t^{k-m} k!/(k-m)! = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{q} a_j u_k^{(j)}(x) t^k + f(x). \tag{5}$$

Заменяя переменную суммирования в левой части ($k-m$ на k), имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{k+m}(x) t^k (k+m)!/k! = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{q} a_j u_k^{(j)}(x) t^k + f(x).$$

Приравнивая сомножители при одинаковых степенях t^k, получаем соотно-шения

$$u_m(x)m! = \sum_{j=0}^{q} a_j u_0^{(j)}(x) + f(x), \qquad (6)$$

$$u_{k+m}(x)t^k(k+m)!/k! = \sum_{j=0}^{q} a_j u_k^{(j)}(x)t^k, \quad k \in \mathbf{N}, \qquad (7)$$

или (делаем обратную замену):

$$u_m(x) = \frac{1}{m!}\left(\sum_{j=0}^{q} a_j u_0{}^{(j)}(x) + f(x)\right), \qquad (8)$$

$$u_k(x) = \frac{(k-m)!}{k!}\sum_{j=0}^{q} a_j u_{k-m}^{(j)}(x), \qquad k = m+1, m+2, \ldots. \qquad (9)$$

Из (2) и (8)-(9) последовательно, рекуррентным образом, находим все члены ряда (3).

Достаточные условия существования решения.

Т е о р е м а 1. Если функции $\varphi_k(z)$, $k=0..m-1$, и $f(z)$ - целые анали-тические экспоненциального типа, то существует целое аналитическое реше-ние задачи (1)-(2), которое выражается формулами (1)-(2)-(8)-(9). Это решение устойчиво по $\varphi_k(z)$ и $f(z)$ по метрике A_ν.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать, что ряд (3) и ряды, полученные из него дифференцированием по x, абсолютно сходятся в любой ограниченной области. По известным свойствам степенных рядов, отсюда будет следовать сходимость ряда, полученного дифференцированием по t.

Не умаляя общности, будем считать, что производные от функций $\varphi_k(z)$ и $f(z)$ берутся в точке $z=0$. Обозначим через C максимальную из норм $\varphi_k(z)$ и $f(z)$ в пространстве A_ν.

Обозначим также $A:=max\{|a_j|:j=0..q\}$.

Применим метод мажорантных функций. Видно, что функции $\varphi_k(z)$ и $f(z)$ и все их производные по модулю не больше, чем функция $C exp(\nu r)$ и ее соответствующие производные при $|z| \le r$.

Обозначим $r=|x|$, $W(\nu)= A\ (1+\nu+\ldots+\nu^q)+1$ (далее используется тот факт, что $W(\nu)>1$). Из (3) имеем:

$u_k(x) << C\ exp(\nu r)/k!,\ k=0..m-1.$

$u_m(x) << (AC\ exp(\nu r)+A\nu C\ exp(\nu r)+\ldots+ A\nu^q C\ exp(\nu r) + C\ exp(\nu r))\ /m! =$

$= (A\ (1+\nu+\ldots+\nu^q)+1)\cdot C\ exp(\nu r)\ /m! \le W(\nu)C\ exp(\nu r)/m!.$

Из последних двух оценок следует, что

$u_k(x) << W^k(\nu)C\ exp(\nu r)/k!,\ k=0..m.$

Докажем этой оценку и для $k>m$ по методу полной математической ин-дукции. Предположим, что она верна для некоторого $k \ge m$. Тогда из (9) получаем

$u_{k+1}(x) << (\ A\ W^{k+1-m}(\nu)C\ exp(\nu r)+A\nu\ W^{k+1-m}(\nu)C\ exp(\nu r)+\ldots$

$+\ A\nu^q W^{k+1-m}(\nu)\ C\ exp(\nu r))/(k+1-m)!\cdot(\ k+1-m)!/(k+1)! <<$

$<< W^{k+1-m}(v)\ W(v)C\ exp(vr)/\ (k+1)! << W^{k+1}C\ exp(vr)/\ (k+1)!.$

Таким образом, доказано, что

$$u_k(x) << W^k(v)\ C\ exp(vr)/k!\ ,\ k \in N_0\ . \qquad (10)$$

Подставляя эту оценку в оценку для каждого слагаемого ряда (3), получаем: $|u_k(x)\ t^k\ | \le |t|^k\ W^k(v)C\ exp(vr)/k!\ ,\ k \in N_0\ .$

то есть ряд (3) мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} |t|^k\ W^k(v)C\ exp(vr)/k! = C\ exp(vr) \sum_{k=0}^{\infty} (|t|\ W(v))^k\ /k! = C\ exp(vr) exp\ (W(v)|t|).$$

Переходим к доказательству сходимости рядов, полученных формаль-ным дифференцированием из (3):

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(j)}(x)t^k = \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}, \quad j \in 1..q\ . \qquad (11)$$

Из свойств мажорирующих рядов – сохранение мажорирования при дифференцировании – и (11) имеем:

$u_k'(x) << W^k(v)v\ C\ exp(vr)/k!\ ,\ u_k''(x) << W^k(v)v^2\ C\ exp(vr)/k!\ , ...$

$$u_k^{(j)}(x) << W^k(v)v^j\ C\ exp(vr)/k!,\ \ k \in N_0\ , j \in 1..q, \qquad (12)$$

то есть ряды (11) мажорируются сходящимися рядами

$$C\ exp(vr)v^j \sum_{k=0}^{\infty} (|t|\ W(v))^k\ /k!, j \in 1..q.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА:

1. ***Аскар кызы Л.*** *Корректность решения двумерного интегрального уравнения первого рода с аналитическими функциями // Проблемы современной науки и образования, 2016, № 21(63). - Иваново: изд. Олимп. – С. 6-9.*
2. ***Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л.*** *Класс интегральных уравнений первого рода, имеющих решение при любой правой // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики: труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Г. И. Марчука, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. - Новосибирск: Абвей, 2015. - С. 321-325.*
3. ***Кененбаева Г.*** *Эффект аналитичности для дифференциальных и интегральных уравнений. – Saarbrücken, Deutschland: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. – 72 с.*