DOI: 10.33942/sit2014 **УДК 517.928**

ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН КАТЕГОРИЯЛАРЫ ЖАНА АНЫН КАМТЫЛГАН КАТЕГОРИЯЛАРЫ

Кененбаева Г.М.[1], Аскар кызы Л.[2], Ийгиликова А.[3], Рыспеков А.Р.[4]
[1]Эларалык инновациялык технологиялар университетинин Санариптик трансформация жана программалоо институтунун профессору gkenenbaeva@mail.ru
[2] Ж.Баласагын атындагы КУУнун "Математика жана информатика" факультетинин доценти, lira130780@mail.ru,
[3]Ж.Баласагын атындагы КУУнун "Математика жана информатика" факультетинин 2 курсунун магистранты, iigilikova.aikanysh@gmail.com,
[4]Эларалык инновациялык технологиялар университетинин Санариптик трансформация жана программалоо институтунун 2 курсунун магистранты Argen1307@gmail.com.

Аннотация: *Мурда биз өзгөртүүлөр учурунда чечимдин сакталуу принцибинин негизинде "предикат" түшүнүгүн колдонуу менен теңдеменин жаңы жалпы түшүнүгүн киргиздик жана белгилүү категориялардын негизинде теңдеме категориясынын элементтерин түздүк. Келечекте ал математиканын көптөгөн тармактарын көрсөтүү үчүн ыңгайлуу болуп чыкты, анткени категориялар теориясы математикалык объекттердин ортосундагы объекттердин ички түзүлүшүнө көз каранды болбогон мамилелердин касиеттерин карайт. Биз теңдеменин жаңы концепциясын жана жалпысынан теңдемелер үчүн аксиоматиканы сунуш кылганбыз [6]-[7].*

Бул макалада теңдемелер категориясынын элементтери жана анын подкатегориясы теңдемелер категориясынын подкатегориясы катары жалпыга белгилүү «Адамар боюнча корректтүүлүктү» кошуу менен келтирилген жана корректтүүлүгүн сактоочуу өзгөртүп түзүүлөргө мисалдары берилген.

Өзөктүү сөздөр: *категория, морфизм, теңдеме, предикат, чечим, корректтүүлүк*

КАТЕГОРИИ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ ПОДКАТЕГОРИИ

Кененбаева Г.М.[1], Аскар кызы Л.[2], Ийгиликова А.[3], Рыспеков А.Р.[4]
[1] профессор Института Цифровой трансформации и программирования Международного университета инновационных технологий gkenenbaeva@mail.ru,
[2]магистрант 2 курса факультета "Математика и информатика" КНУ им. Ж.Баласагына, lira130780@mail.ru,
[3]магистрант 2 курса факультета "Математика и информатика" КНУ им. Ж.Баласагына, iigilikova.aikanysh@gmail.com,
[4]магистрант 2 курса Института Цифровой трансформации и программирования Международного университета инновационных технологий Argen1307@gmail.com

Аннотация: *Ранее нами было введено новое общее понятие уравнения с помощью понятия "предикат" на основе принципа сохранения решения при преобразованиях и построены элементы категории уравнений на основе известных категорий. В дальнейшем он оказался удобным для изложения многих разделов математики, поскольку теория категорий рассматривает свойства отношений между математическими объектами, не зависящие от внутренней структуры объектов. Нами предложены новое понятие уравнения и аксиоматика для уравнений в целом [6]-[7].*

В данной статье даны элементы категории уравнений и ее подкатегории как подкатегории категории уравнений с включением известной «корректности по Адамару» и приведены примеры преобразований с сохранением корректности.

Ключевые слова: *категория, морфизм, уравнение, предикат, решение, корррректность.*

CATEGORIES OF EQUATIONS AND ITS SUBCATEGORY

G.M.Kenenbaeva[1], Askar kyzy L[2], A.Iigilikova[3], A.R.Ryspekov[4]
[1] Professor, Institute of Digital Transformation and Programming, International University of Innovative Technologies gkenenbaeva@mail.ru
[2]Assistant professor of the Faculty of Mathematics and Informatics, KNU named after J. Balasagyn, lira130780@mail.ru,
[3] 2rd year student of the Faculty of Mathematics and Informatics, KNU named after J. Balasagyn, iigilikova.aikanysh@gmail.com,
[4]2nd year undergraduate student of the Institute of Digital Transformation and Programming of the International University of Innovative Technologies Argen1307@gmail.com

Annotation. *A new general notion of equation was introduced by us with assistance of the notion "predicate" on the base of the principle of preservation of solution while transformations and elements of the category of equations were constructed on the base of well-known categories. Subsequently, it turned out to be convenient for the presentation of many branches of mathematics, since the theory of categories considers the properties of relations between mathematical objects, independent of the internal structure of objects. We have proposed a new concept of an equation and an axiomatics for equations in the large [6]-[7].*

This paper gives the elements of the category of equations and its subcategory as a subcategory of the category of equations with the inclusion of the well-known "Hadamard correctness" and to present examples of transformations with preserving of correctness.

Keywords: *category, morphism, equation, predicate, solution, correctness*

1. Введение. Термин «категория» в смысле оснований математики был введен в [1]. В дальнейшем он оказался удобным для изложения многих разделов математики, поскольку теория категорий рассматривает свойства отношений между математическими объектами, не зависящие от внутренней структуры объектов. В Кыргызстане первые результаты по категорной алгебре получил М.Я.Медведев [2], ряд результатов по категорной топологии был получен академиком А.А.Борубаевым, А.А.Чекеевым и их учениками, см. [3].

Категория для одного из видов уравнений была построена в [4]. Нами предложены новое понятие уравнения и аксиоматика для уравнений в целом [6]-[7].

В данной статье эта аксиоматика уточняется для уравнений, обычно называемых «корректными». Приведены примеры.

2. Основные сведения из теории категорий. Теория категорий возникла из того, что с теоретико-множественной точки зрения совокупность всех множеств не является множеством - это приводит к противоречиям. Условно говорится, что «она слишком велика». То же относится и к совокупности преобразований множеств и другим совокупностям в различных разделах математики. Поэтому нельзя говорить, например, о «категории всех категорий».

О п р е д е л е н и е 1. Категория K задаётся

1) Совокупностью $A,B,C,$ … объектов $Ob(K)$;

2) Совокупностью $f,g,h,$ …морфизмов $Mor(K)$;

3) Операциями dom и cod, которые сопоставляют каждому морфизму f некоторые объекты $dom(f)$ и $cod(f)$ (они называются началом и концом f). Тот факт, что $dom(f) = A$ и $cod(f) = B$, изображается так $f: A \to B$. В этом случае говорят, что f – морфизм из A в B.

4) Операцией композиции, которая по каждой паре морфизмов f и g, таких, что $cod(f) = dom(g)$, выдаёт некоторый морфизм $g \circ f : A \to C$ (она называется композицией g и f).

5) Операцией I, которая по каждому объекту A выдаёт некоторый морфизм $I_A : A \to A$ (он называется тождественным или единичным морфизмом объекта A).

Совокупность всех морфизмов из A в B в категории K обозначается $K(A, B)$. При этом должны выполняться следующие условия:

1. Ассоциативность композиции. Для любой тройки морфизмов $f, g, h, f{:}A \to B; g{:}B \to C; h{:}C \to D$ выполнено равенство $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

2. Свойства тождества. Для любого морфизма $f : A \to B$ выполнены равенства $f \circ I_A = f$, $I_B \circ f = f$.

Основными категориями, из которых строятся все остальные, являются следующие:

Категория множеств *Set*. *Ob(Set)* - непустые множества, *Mor(Set)* – функции, отображающие одни множества в другие.

Категория функций *Func* (операторов, преобразований, отображений). *Ob(Func)* = *Mor(Set)*, *Mor(Func)* – преобразования функций. В свою очередь, подкатегории этой категории используются в различных разделах математики.

Категория топологических пространств *Top*. *Ob(Top)* - топологические пространства, *Mor(Top)* - непрерывные отображения.

Понятия из этой категории используются, в том числе, в категории уравнений, и ее подкатегории - категории корректных уравнений.

3. Построение категории уравнений. Обычно уравнения подразделяются неформально на алгебраические, дифференциальные, интегральные, с начальными или краевыми условиями и т.д. Нами был использован тот факт, что уравнения и системы уравнений различных типов эквивалентны. Более того, известный прием понижения порядка автономных обыкновенных дифференциальных уравнений, различные методы подстановок и преобразований аргумента, развиваемый в Кыргызстане метод преобразования решений, созданные в Кыргызстане метод дополнительного аргумента, метод сведения дифференциальных уравнений к системам операторно-разностных уравнений показали, что эквивалентными могут быть уравнения с различными решениями, и даже в различных пространствах. Поэтому мы расширили понятие «уравнение» с включением понятий «система уравнений», «уравнение с дополнительными условиями» для строгого и единообразного описания упомянутых методов и формулировки основных понятий, объектов и морфизмов категории уравнений и ее подкатегорий, установление ее связей с другими категориями.

Категорию уравнений мы обозначили *Equa*.

О п р е д е л е н и е 2. *Ob(Equa)* - наборы {непустые множества X, Y, предикат $P(x)$ на X, преобразование $B{:}X \to Y$}.

Решением уравнения $\{X, Y, P, B\}$ называется такое $y \in Y$, что $(\exists x \in X)(P(x) \wedge (y = B(x)))$.

В частности, если B - тождественное отображение, то получаем только задачу решения уравнения *“P(x)”*.

Mor(Equa) - это такие преобразования наборов $\{X, Y, P, B\}$, что решения (или их отсутствие) сохраняются.

Категория уравнений *Equa-Top* с непрерывными обобщенными предикатами: *Ob(Equa-Top)* - наборы $\{X, Y \in Ob(Top)$, функция $P(x)$ на X, принимающая конечный набор значений, из них одно выделенное «истина», функция $B{:}X \to Y\}$, при условии, что при непрерывном переходе в X функция $P(x)$ меняет значения только на соседние};

Такие предикаты были введены в [5] для компьютерной реализации принципа ненулевого вращения.

Также мы определили некоторые подкатегории категории *Equa*.

Категория уравнений для функций *Equa-Func*.

Определение 3. *Ob(Equa-Func)* - наборы $\{X \in Ob(Func), Y \in Ob(Func)$, предикат $P(x)$ на X, преобразование $B{:}X \to Y\}$. *Mor(Equa-Func)* - преобразования, в том числе следующие:

Преобразование аргумента. Для функции $x(t)$ вводится биективная замена $t=\psi(s)$, обозначается $z(s)=x(\psi(s))$ из нового пространства функций Z и вводится предикат P_1, такие, что $\{x \in X{:}P(x)\}= \{z \in Z{:}\ P_1(z)\}$.

Для уравнений с параметрами мы предложили

Определение 4. *Ob(Equa-Par)* - наборы {непустые множества X, F, Y, предикат $P(x,f)$ на $X \times F$, преобразование $B{:}X \to Y\}$.

Решением уравнения $\{X, F, Y, P, B\}$ для любого $f \in F$ названо такое $y(f) \in Y$, что $(\exists x \in X)(P(x,f) \wedge (y=B(x)))$. В частности, если B - тождественное преобразование, то получаем только задачу решения уравнения *"P(x,y)"*.

Mor(Equa-Par) - это такие преобразования наборов $\{X, Y, P, B\}$ (кроме F), что решения (или их отсутствие) сохраняются.

Категории уравнений с целыми числами *Equa-Par-Integer* подкатегория категории *Equa-Par*, где F - множество целых чисел или целочисленных векторов в некоторых диапазонах, Y - множество целых чисел. Используется для автоматического контроля знаний учащихся.

4. Категория корректных уравнений. При нашем подходе «корректность» может быть только по параметру (в широком смысле). Для категории корректных уравнений с параметрами предлагается обозначение *Equa-Par-Top*.

Определение 5. *Ob(Equa-Par-Top)* - наборы {топологические пространства X, F, Y, предикат $P(x,f)$ на $X \times F$, непрерывное преобразование $B{:}X \to Y\}$. При этом 1) $(\forall f \in F)(\exists! y \in Y)(\exists x \in X)\ (P(x,f) \wedge (y=B(x));$

2) элемент y непрерывно зависит от элемента f.

Mor(Equa-Par-Top) - преобразования, сохраняющие свойства 1) и 2).

Эти условия обобщают известные условия Адамара.

Примечание. Обычно под словом «параметр» понимается «числовой параметр». В данном определении это понятие используется более широко - корректность по различным объектам, всходящим в условие задачи, как это было предложено в [8].

Подкатегорией всех упомянутых категорий является категория корректных уравнений для функций с параметрами, которую можно обозначить *Equa-Func-Par-Top*.

Пример 1. Если предикат записывается в виде $P(x,f)$ =" $A(x)=f$", где A - некоторый оператор, B - тождественное преобразование, то получаем «корректность по Адамару».

Пример 2. Если $x(t)$ - дифференцируемая функция, предикат записывается в виде $P(x,f)$ =" $x'(t)=a(t)x(t)$; $x(0)=f\in\mathbf{R}$", B - тождественное преобразование, то получаем «непрерывную зависимость решения начальной задачи от начальных данных». Преобразование

$$P_1(x,f) = \text{"}x(t)-\int_0^t a(s)x(s)ds = f\text{"}$$

приводит к Примеру 1. Преобразование $P_2(x,f)$ =" $x(t)=a(t)\left(f+\int_0^t x(s)ds\right)$", $B_2(x(t))=x'(t)$ приводит к замене дифференциального уравнения интегральным с параметром.

5. Заключение.

В различных разделах теории динамических систем рассматриваются дифференциальные, интегральные, разностные, а также интегро-дифферен-циальные и другие типы уравнений, с начальными, краевыми условиями и другой дополнительной информацией, в различных функциональных пространствах. Для единообразного представления таких задач, а также для более систематического применения и обобщения известных методов предлагается применить подход теории категорий.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. **Eilenberg S., MacLane S.** *A general theory of natural equivalences // Transactions of American Mathematical Society, 1945, 58: pp. 231–294.*
2. **Медведев М.Я.** *Полусопряженные функторы и категории алгебр над n-тройками: Автореферат дисс. ... к. ф.-м.н. (01.01.04). - Новосибирск, 1973. - 17 с.*
3. **Борубаев А.А.** *О категорных характеристиках компактных, полных равномерных пространств и полных по Райкову топологических групп // Известия Академии наук, вып. 4, 2007. - С. 1-6.*
4. **Rosický J.** *Equational categories // Cachiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, vol. 22, no. 1, 1981. - Pp.85-95.*
5. **Кененбаева Г.М.** *Применение доказательных вычислений к поиску областей, удовлетворяющих заданным свойствам/ Г.М.Кененбаева. - Автореферат дисс. ... к.ф.-м.н., 05.13.16. - Новосибирск, 1991. - 16 с.*
6. **Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л., Бейшебаева Ж.К., Маматжан уулу Э.** *Элементы категории уравнений // Вестник Института математики НАНКР, 2018, № 1. - С. 88-95.*
7. **Kenenbaeva G.M., Askar kyzy L.** *Foundations of category of equations // Тезисы докладов Международной научной конференции «III Борубаевские чтения», посвященной 35-летию со дня образования Института математики НАН КР. - Бишкек: Институт математики, 2019. - С. 46.*
8. **Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.** *Прикладная математика. - Киев: Наукова думка, 1976. - 270 с.*

9. *Аскарова Ч.Т., Абзалов Ф.С., Бакасов Т.А., Синельников В.Ю. Автоматизированные системы управления персоналом. //Наука и инновационные технологии.-№2(19). 2021, С. 5-10.*

10. *Абзалов Ф.С., Бакасов Т.А., Жамалова В.Ж., Синельников В.Ю. Анализ конструкторов по созданию сайта. //Наука и инновационные технологии.№2(19). 2021, С. 11-15*