DOI: 10.33942/sititpr202202 **УДК: 532.5**

БУЛАК АГЫМЫНЫН СЫНА СИММЕТРИЯЛУУ КАВИТАЦИЯ АГЫМЫ

Абдылдаев М.Ю.[1], Керимов У.Т.[2], Ачекеев К.С. [3], Мукамбетова Н.Т.[4]

(1) *И. Арабаева атындагы КМУнун «Физика жана аны окутуунун технологиясы» кафедрасынын профессору, т.и.д,* m.abyldaev1934@mail.ru
(2) *И. Арабаева атындагы КМУнун «Колдонмо информатика» кафедрасынын доцентинин м.а.,* u.kerimov@bk.ru
(3) *И. Арабаева атындагы КМУнун «Колдонмо информатика» кафедрасынын ага окутуучусу,* kadyrbekachekeev@mail.ru
(4) *И. Арабаева атындагы КМУнун «Физика жана аны окутуунун технологиясы» кафедрасынын ага окутуучусу,* nuriya_mukambetova@mail.ru

Аннотация: *Тегиздик кавитация маселелери чечилет. Н.Е.Жуковскийдин классикалык ыкмасы менен изилденип, жалпы чечим параметрдик формада табылган. Кавитациянын санынын формулалары келтирилген. Кавитация саны үчүн башка формулалар менен салыштыруу жүргүзүлөт.*

Өзөктүү сөздөр: *реактивдүү учактар, кавитациялар, суюктук, пластинка, жарым тегиздик, сызыктар.*

СИММЕТРИЧНОЕ КАВИТАЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ КЛИНА ПОТОКОВ ИСТОЧНИКА

Абдылдаев М.Ю.[1], Керимов У.Т.[2], Ачекеев К.С.[3], Мукамбетова Н.Т.[4]

(1) *Д.т.н., профессор кафедры «Физика и технология ее обучения» КГУ им. И.Арабаева,* m.abyldaev1934@mail.ru
(2) *и.о. доцента кафедры «Прикладная информатика» КГУ им. И.Арабаева,* u.kerimov@bk.ru
(3) *Старший преподаватель кафедры «Прикладная информатика» КГУ им. И.Арабаева,* kadyrbekachekeev@mail.ru
(4) *Старший преподаватель кафедры «Физика и технология ее обучения» КГУ им. И.Арабаева,* nuriya_mukambetova@mail.ru

Аннотация: *Решаются плоские задачи кавитации. Исследуется классическим методом Н.Е.Жуковского находится общее решение в параметрической форме. Приводится формулы число кавитации. Производятся сравнения с другими формулами число кавитации.*

Ключевые слова: *струи, кавитации, жидкость, пластина, полуплоскость, линии тока.*

SYMMETRICAL CAVITATION FLOW OF SOURCE FLOW WEDGE

Abdyldaev M.Yu.[1], Kerimov U.T.[2], Achekeev K.S. [3], Mukambetova N.T.[4]

(1) *Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department "Physics and Technology of Its Training" of the KSU named after I. Arabaev,* m.abyldaev1934@mail.ru
(2) *acting Associate Professor of the Department of "Applied Informatics" of the KSU named after I. Arabaev,* u.kerimov@bk.ru

(3) senior lecturer of the Department of "Applied Informatics" of the KSU named after I. Arabaev, kadyrbekachekeev@mail.ru
(4) senior lecturer of the Department of " Physics and Technology of Its Training " of the KSU named after I. Arabaev, nuriya_mukambetova@mail.ru

Abstract: *Plane cavitation problems are solved. Investigated by the classical method of N.E. Zhukovsky, the general solution is found in parametric form. The formulas for the number of cavitation are given. Comparisons are made with other formulas for the cavitation number.*
Keywords: *jets, cavitations, liquid, plate, half-plane, streamlines.*

Изучение кавитационных обтеканий различных препятствий потоком жидкости представляет большой теоретический к практическому интересу, однако, математическое исследование возникающих задач, сопряжено со значительными трудностями. Первая задача по теории струй была решена Гельмгольцем. Кирхгоф существенно разбил к обобщил метод Гельмгольца. После работ Кирхгофа и Гельмгольца следующей крупный шаг был сделан Н.Е.Жуковским.

Рассмотрим кавитационное обтекание симметричного клина $B'AB$ с углом раствора $2\pi\mu$. С клина срывается струи, переходящие в бесконечно длинные параллельные плоские пластинки СН и СН’, препятствующие смыканию струй (рис.1). Обтекание происходит потоком источника расположенной в точке S по схеме аналогичной кавитационной схеме Н.Е.Жуковского - Рошко[1]. Скорость на струях ВС и ВС равноv_0. Вдоль стенок CH или $C'H'$скорость монотонно падает от величины v_0 до скорости потока в бесконечности равное нулю.

Задача решается методом Н.Е.Жуковского [1].

$$\omega = ln\zeta = -ln\frac{dw}{v_0 dz} = -ln\frac{v}{v_0} + i\theta \qquad (1)$$

Как известно, что математическая теория плоских течений идеальной жидкости оперирует с тремя комплексными величинами: Координатой точки $z = x + iy$, комплексным потенциалом $w = \varphi + i\psi$, и комплексной (сопряженной) скоростью $\zeta = u + iv$ от вектора скорости$\bar{\zeta} = u - iv$ [4].

Для решения задачи отобразим верхнюю половину области течения $z(J_m z \geq 0)$ и соответствующие ей области изменения функций ${dw}/{(v_0 dz)}$ и w на верхнюю половину плоскости параметрического переменного $t(J_m t \geq 0)$ (рис.2).

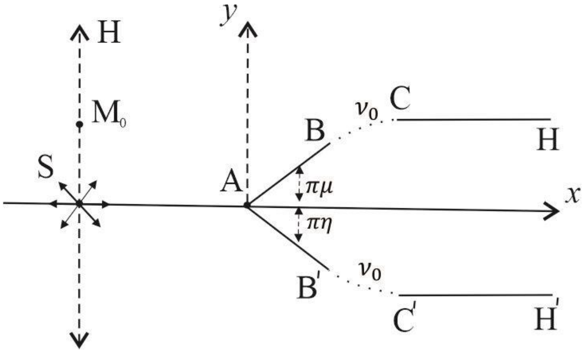

Рисунок 1. Картина течения в физической плоскости $z = x + iy$

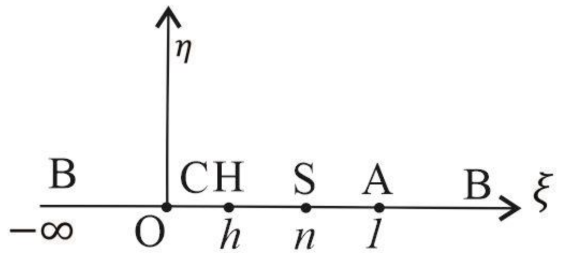

Рисунок 2. Параметрическая плоскость $t = \xi + i\eta$

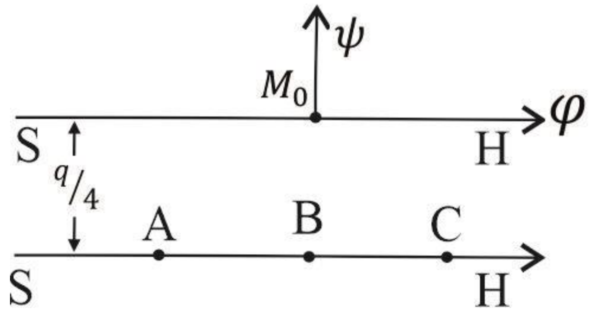

Рисунок 3. Область изменения комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$

Пусть на одной граничной линии тока. SM_0H функция тока $\psi = 0$, а на другой граничной линии тока $SABCH$ $\psi = \frac{q}{4}$ (рис.3). При движении вдоль линии тока потенциал скоростей φ, очевидно, меняется от $-\infty$ до $+\infty$.

Таким образом, областью изменения w является полоса шириной $^{q}/_{4}$ (рис.3). Для получения отображения этой полосы на верхнюю полуплоскость t (рис.2) можно воспользоваться формулой Кристоффеля – Шварца [1]. Предположим, что t в вершинах двугольника (полосы) имеет значения: $t_S = n$

и $t_H = h$.

При этом имеем функцию $w = C_1 \int_1^t \frac{dt}{(t-h)(t-n)} - i\frac{q}{4}$,

где

$$\mathrm{C}_1 = \frac{q}{4\pi}(n-h) \qquad (2)$$

Разложим под интегральные дроби на сумму элементарных дробей:

$\frac{1}{(t-h)(t-n)} = \frac{A_1}{t-h} + \frac{A_2}{t-n}$. Постоянные $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ определяются методом неопределенных коэффициентов. $A_1 = \frac{1}{h-n}$; $A_2 \frac{1}{n-h}$. $1 = A_1(t-n) + A_2(t-h)$

С учетом (2) для функции $w(t)$ имеем формулы:

$$w(t) = \frac{q}{4\pi} ln \frac{t-n}{t-h} \cdot \frac{1-h}{1-n} - i\frac{q}{4} \qquad (3)$$

Формулу (3) легко проверить. Действительно, на SM_0H мнимая часть функции w равна нулю, а действительная w меняется от $-\infty$ в точке $t = n(S)$ до $+\infty$ в точке $t = h(H)$:

$$J_m w(t) = J_m \left\{ \frac{q}{4\pi} ln \frac{n-t}{t-h} \cdot \frac{1-h}{1-n} \cdot ln^{i\pi} \right\} - i\frac{q}{4} = 0$$

На участках $SA(n < t < 1), AB(1 < t < +\infty), BC(-\infty < t < 0), CH(0 < t < h)$

$$J_m w(t) = J_m \left\{ \frac{q}{4\pi} ln \frac{n-t}{t-h} \cdot \frac{1-h}{1-n} \cdot ln^{i\pi} \right\} - i\frac{q}{4} = -\frac{q}{4}$$

В верхней полуплоскости t функция $w(t)$ аналитична.

Найдем теперь функцию Н.Е.Жуковского [1]. В плоскости Н.Е.Жуковского функция ω имеет двулистную (римановой) поверхности. Ввиду сложности отображения этой области в вехнюю полуплоскости параметрического переменного $t(J_m t \geq 0)$используется интегральные формулы Шварца для верхней полуплоскости [3]:

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_m F(\xi)}{\xi - t} \tag{4}$$

где функция $F(t)$ легко определяется с помощью известного решения задачи об определении функции комплексного переменного в верхней полуплоскости по её заданной мнимой части.

Введем вспомогательную функцию, связанной с функцией Н.Е.Жуковского:

$$\Omega(t) = \frac{\omega(t)}{\sqrt{t}} = \frac{ln\frac{\nu_0}{\nu}}{\sqrt{t}} + i\frac{\theta}{\sqrt{t}} \tag{5}$$

В нашем случае:

На участках: $CA(n < t < 1), BC(-\infty < t < 0), CH(0 < t < h)$

$J_m\Omega(\xi) = 0$, притом на BC $J_m\Omega(\xi)$ меняется на $Re_m\Omega(\xi)$, где $t < 0$, $\nu = \nu_0$, а на участках $HS(h < t < n)$ и $AB(1 < t < +\infty)$ $J_m\Omega(\xi)$ имеет значения $\pi/2\sqrt{\xi}$ и $\alpha/\sqrt{\xi}$ соответственно.

Таким образом, для функции $\Omega(\xi)$ имеем

$$\Omega(t) = \frac{\omega(t)}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_h^n \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi - t)} + \frac{\alpha}{\pi}\int_1^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi - t)}$$

Откуда

$$\omega(t) = ln \left\{ \frac{\sqrt{n}-\sqrt{t}}{\sqrt{n}+\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{h}+\sqrt{t}}{\sqrt{h}-\sqrt{t}} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \right\}^{\alpha/\pi} \tag{6}$$

$$\zeta(t) = \left\{ \frac{\sqrt{n}-\sqrt{t}}{\sqrt{n}+\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{h}+\sqrt{t}}{\sqrt{h}-\sqrt{t}} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \right\}^{\alpha/\pi} \tag{7}$$

$$\bar{\zeta}(t) = \left\{ \frac{\sqrt{n}+\sqrt{t}}{\sqrt{n}-\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{h}-\sqrt{t}}{\sqrt{h}+\sqrt{t}} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} \right\}^{\alpha/\pi} \tag{8}$$

В формуле (8) обеспечено нужное соответствие характерных точек границы:

$\bar{\zeta}_S(n) = \{\nu = \infty\}, \bar{\zeta}_A(1) = \begin{Bmatrix} \nu = 0 \\ \theta = 0 \end{Bmatrix}, \bar{\zeta}_B(\infty) = \begin{Bmatrix} \nu = \nu_0 \\ \theta = \alpha \end{Bmatrix}, \bar{\zeta}_C(0) = \begin{Bmatrix} \nu = \nu_0 \\ \theta = 0 \end{Bmatrix},$

$\bar{\zeta}_H(h) = \{\nu = 0\}.$

Так как функция $\bar{\zeta}(t) = {dw}/{(v_0 dz)}$ удовлетворяет граничным условиям задачи и голоморфна в любой точке верхней полуплоскости $t(J_m t \geq 0)$, то формула (8) решает задачу о конформном отображении $\bar{\zeta}(t)$ на верхнюю полуплоскость t.

Из формулы (3) и (8), где

$$dw/_{dt} = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{n-h}{(t-h)(t-n)} \tag{9}$$

Имеем

$$z(t) = \frac{q}{4\pi v_0}(n-h)\int_1^t \zeta(t)\frac{dt}{(t-h)(t-n)} \tag{10}$$

где $\zeta(t)$ определяется по формуле (7).

Формулы (3), (8) и (10) дают общее решение задачи в параметрической форме.

Полученные формулы позволяют найти наиболее интересную для данной задачи величину число кавитации:

$$Q = \frac{2(P_S - P_0)}{\rho v_S{}^2} = \frac{v_0{}^2}{v_S{}^2} - 1 \tag{11}$$

где P_S – давление в набегающем потоке.

Так как скорость в точке S(источник) бесконечна, а в точке A равна нулю (рис.1), то для определения число кавитации в данном примере будем брать среднюю скорость набегающего невозмущенного потока v_{CP} в точке A (без клина).

Комплексный потенциал источника, расположенный в произвольной точке z_0 (комплексной плоскости) имеет вид: $w = \frac{q}{2\pi}\ln(z - z_0)$

Откуда $dw/_{dz} = \frac{q}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}$

Таким образом, искомая средняя скорость будет

$$v_{CP} = \frac{q}{2\pi} \cdot \frac{1}{L} \tag{12}$$

где $L = |SA|$ расстояние от источника до клина (рис.1). На основании формулы (10) для расстояния имеет

$$L = \frac{q}{2\pi}(n-h) \cdot \int_n^1 \zeta(t)\frac{dt}{(t-h)(t-n)} \tag{13}$$

Следовательно, число кавитации в параметрической форме имеет вид:

$$Q(t) = \left(\frac{n-h}{2}\right)^2 \cdot \left(\int_n^1 \zeta(t)\frac{dt}{(t-h)(t-n)}\right)^2 - 1 \tag{14}$$

где $\zeta(t)$ определяется по формуле (7).

Таким образом, задание параметры n и h равносильны заданию числа кавитации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ***М.И.Гуревич*** *Теория струй идеальной жидкости. Гос. изд. ф-мат. Литература. Москва 1961.*
2. ***М.Ю. Абдылдаев.*** *Плоские задачи теории струй идеальной жидкости. НАН КР. Институт автоматики. «Илим». Бишкек 1999.*
3. ***Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.*** *Методы теории комплексного переменного. М.:Наука. - 1973г.*
4. ***Абдылдаев, М. Ю.*** *Истечение жидкости из щели между двумя плоскостями имеющей на оси препятствие / М. Ю. Абдылдаев, У. Т. Керимов, Б. Б. Кольбаева // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2020. – № 10. – С. 3-8. – DOI 10.26104/NNTIK.2019.45.557. – EDN EHZIWJ.*
5. ***Абдылдаев, М. Ю.*** *Об одной задаче Эриха / М. Ю. Абдылдаев, К. Ч. Токонбекова // Вестник Жалал-Абадского государственного университета. – 2019. – № 3(42). – С. 143-147. – EDN BFLFMW.*
6. ***Б.А. Фукс и Ж. Б. Шабат.*** *Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. Издательство наука. Москва 1964.*
7. ***Рахматулин Х.А., Гувернюк С.В.****, О постановке задач обтекания проницаемых тел несжимаемой средой.// Парашюты и проницаемые тела. М.: Изд. МГУ, 1987.*
8. ***П.Р.Андронов, С.Б.Гувернюк.*** *Решение задачи о плоской струе, натекающей на бесконечный проницаемый экран// Проблемы современной механики. М.: Изд. МГУ ин-т механики 1998. С.179-185.*
9. ***Г. Биркгоф, Э Сарантонелло.*** *Струи, следы и каверны. Издат. "Мир" Москва. 1964 г.*
10. ***Хмельник М.И.*** *// Некоторые типы струйных течений на конусе и на плоскости. Ученые записки МОПИ. Труды кафедры теоретической физики. Т.75. вып. 4. 1958.*