**УДК 517.928 DOI: 10.33942/sit042212**

# СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ТЕҢДЕЛЕР ҮЧҮН ЧЕТТИК МАСЕЛЕНИН АСИМПТОТТУК ЧЫГАРЫЛЫШЫ

**Назаркулова Б..(1), Кененбаева Г.М.(2), Рахатбекова А.Р. (3)**

*(1) физика-математика илимдеринин кандидаты;*
*(2) физика-математика илимдеринин доктору; gkenenbaeva@mail.ru*
*(3) Колдонмо математика, информатика жана компьютердик технологиялар кафедрасынын магистри, математики жана информатики факультети Ж.Баласагын ат. КУУ Бишкек, Кыргызстан.*

***Аннотация:*** *Сызыктуу эмес теңдеменин, анын ичинде жеке туундулуу теңдеменин, асимптотикалык чечимдери абдан актуалдуу маселе бойдон калууда. Ошондуктан, ар кандай маселелерди чечүү үчүн асимптотикалык кеңейүүлөрдү куруунун бир катар ыкмалары иштелип чыккан. Бул ыкмаларды төмөнкүдөй классификациялоого болот: алгебралык, аналитикалык жана асимптотикалык (анын ичинде биздин катышуубуз менен түзүлгөн [4,6]). Бул макалада баштапкы жана четтик шарттары менен экинчи даражадагы сызыктуу эмес жекече туундулуу дифференциалдык теңдеменин асимптотикалык чечими курулган. Маселени чечүүнүн кичи параметрине карата асимптотика алынат. Калдык мүчөнүн квадраттык интегралдык баасы боюнча далилденген теорема маселенин чыгарылышынын жыйналуучулугун берет.*

***Ачкыч сөздөр:*** *асимптотикалык чыгарылыш, сызыктуу эмес теңдеме, калдык мүчө, баа.*

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Назаркулова Б..(1), Кененбаева Г.М.(2), Рахатбекова А.Р. (3)
*(1) кандидат физико-математических наук;*
*(2) доктор физико-математических наук gkenenbaeva@mail.ru*
*(3) магистр кафедры прикладной математики, информатики и компьютерных технологий, факультет математики и информатики КНУ им. Ж.Баласагына, Бишкек, Кыргызстан.*

***Аннотация:*** *Асимптотические решения нелинейного уравнения, в том числе в частных производных, остается весьма актуальной проблемой. Поэтому создан ряд методов построения асимптотических разложений решений различных задач. Эти методы можно классифицировать следующим образом: алгебраические, аналитические и асимптотические (в том числе созданные с нашим участием [4,9]). В данной статье построено асимптотическое решение нелинейного уравнения в частных производных второго порядка с начальными и краевыми условиями. Получена асимптотика по малому параметру решения задачи. Доказанная теорема о квадратичной интегральной оценке остаточного члена дает сходимость решения задачи.*

***Ключевые слова:*** *асимптотическое решение, нелинейное уравнение, остаточный член, оценка.*

# ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE BOUNDARY PROBLEM FOR NONLINEAR EQUATION

Nazarkulova B.(1) , Kenenbaeva G.M. (2), Rakhatbekova A.R. (3)

*(1) Candidate of Physical and Mathematical Sciences,*
*(2) Doctor of Physical and Mathematical Sciences, gkenenbaeva@mail.ru*

(3) *Master, Department of Applied Mathematics, Informatics and Computer Technologies Faculty of Mathematics and Informatics, KNU them. J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyz Republic*

***Annotation**: The development of methods for the asymptotic solution of a nonlinear partial differential equation remains a very urgent problem. Therefore, a number of methods for constructing asymptotic expansions of solutions of various problems had been created. These methods can be classified as follows: algebraic, analytical and asymptotic (including those created with our participation [4,6]). In this paper we construct an asymptotic solution of the nonlinear second order partial differential equation* with initial and boundary conditions. *The asymptotics with respect to a small parameter of the solution of the problem has been obtained. The theorem on the quadratic integral estimate of the remainder term has been proved under. This proves the convergence of the problem solution.*

***Keywords:** Asymptotic solution, nonlinear equation, remainder term, estimate.*

Ранее некоторые эффекты и явления были обнаружены методами, [1-3, 5, 6, 9], которые можно классифицировать следующим образом: алгебраические, аналитические и асимптотические (в том числе созданы с нашим участием), [4,6].

Известно, что создан ряд методов построения асимптотических разложений решений различных задач. Это метод пограничных функций, развитый в работах А.Б.Васильевой, М. И. Вишика, Л.А. Люстерника, В.Ф.Бутузова; метод регуляризации С.А.Ломова, методы усреднения, сращивания асимптотических разложений А.М.Ильина и другие. Также следует отметить немалые вклады в развитие теории асимптотических методов Н. Левинсона, Дж. Хединга, А.Х. Найфэ.

Все вышеуказанные методы позволяют получить асимптотические разложения решений для весьма широких классов уравнений. Каждый из них не охватывает все многообразие задач, и для уравнений в частных производных в критическом случае. Поэтому разработка методов асимптотического решения нелинейного уравнения в частных производных остается весьма актуальной проблемой. Вместе с тем ранее в [6] было предложено рассматривать множество решений вырожденного уравнения, как точечное, без дополнительных предположений на известные функции. Такой подход позволил применить методы доказательного поиска областей [4] для построения асимптотики решений (гарантированных границ траекторий) сингулярно – возмущенных систем.

В [1] представлен метод вычисления асимптотических разложений решений алгебраических и дифференциальных уравнений. Метод основан на идеях и алгоритмах степенной геометрии. Степенная геометрия имеет приложения в алгебраической геометрии, дифференциальной алгебре, нестандартном анализе.

Ниже построено асимптотическое решение нелинейного уравнения в частных производных второго порядка. Доказана теорема о квадратичной интегральной оценке остаточного члена, т.е. решение задачи сходится к решению вырожденного уравнения.

**Постановка задачи**

Рассмотрим уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} - \varepsilon a(x)\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} = f\left(t,x,y(t,x),\frac{\partial y(t,x)}{\partial t}\right) \quad (1)$$

с начальными и краевыми условиями

$$y(0,x,\varepsilon)=\phi(x), \qquad \frac{\partial y(0,x,\varepsilon)}{\partial t}=\psi(x) \quad (2)$$

$$y(t,0,\varepsilon)=\omega_0(t), \quad y(t,l,\varepsilon)=\omega_l(t) \quad (3)$$

в области $Q=\{0\le t\le T,\ 0\le x\le l\}$, где $\varepsilon$ - малый положительный параметр.

Предположим, что функции, входящие в (1) – (3), удовлетворяют следующим условиям:

(A): $a(x)$, $f\left(t,x,y,\frac{\partial y}{\partial t}\right)$, $\phi(x),\psi(x),\omega_0(t),\omega_l(t)$ – непрерывны, достаточное количество раз непрерывно дифференцируемые по совокупности своих аргументов в области $Q$ и при $-\infty<y_t<+\infty$, $-\infty<y_t<+\infty$, причем $a(x)\ge\lambda>0$.

Дадим асимптотику по малому параметру $\varepsilon>0$ решения задачи (1) – (3).

Приближенное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) будем искать в виде:

$$\overline{U}_n(t,x,\varepsilon)=U_0(t,x)+\varepsilon U_1(t,x)+\varepsilon^2U_2(t,x)+\ldots+\varepsilon^nU_n(t,x) \quad (4)$$

Представляя (4) в уравнение (1) и условие (2), получаем

$$\frac{\partial^2U_0(t,x)}{\partial t^2}+\varepsilon\ \frac{\partial^2U_1(t,x)}{\partial t^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2U_2(t,x)}{\partial t^2}+\ldots+\varepsilon^n\frac{\partial^2U_N(t,x)}{\partial t^2}-\varepsilon a(x)\frac{\partial^2U_0(t,x)}{\partial x^2}-$$

$$-\varepsilon^2a(x)\frac{\partial^2U_1(t,x)}{\partial x^2}-\varepsilon^3a(x)\frac{\partial^2U_2(t,x)}{\partial x^2}-\ldots-\varepsilon^{n+1}\frac{\partial^2U_n(t,x)}{\partial x^2}=$$

$$=f\left(t,x,U_0(t,x)+\varepsilon U_1(t,x)+\varepsilon^2U_2(t,x)+\ldots+\varepsilon^nU_n(t,x),\frac{\partial U_0(t,x)}{\partial t}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon\frac{\partial U_1(t,x)}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial U_2(t,x)}{\partial t}+\ldots+\varepsilon^n\frac{\partial U_n(t,x)}{\partial t}\right) \quad (5)$$

$$\overline{U_n}(0,x,\varepsilon)=U_0(0,x)+\varepsilon U_1(0,x)+\varepsilon^2U_2(0,x)+\ldots+\varepsilon^nU_n(0,x)=\phi(x),$$

$$\frac{\partial\overline{U}_n(0,x,\varepsilon)}{\partial t}=\frac{\partial U_0(0,x)}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial U_1(0,x)}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial U_2(0,x)}{\partial t}+\ldots+\varepsilon^n\frac{\partial U_n(0,x)}{\partial t}=\psi(x) \quad (6)$$

В правой части (5) функцию

$$f\left(t,x\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k U_k(t,x),\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k\frac{\partial U_k(t,x)}{\partial t}\right)$$

разлагаем в ряды Тейлора по целым положительным степеням параметра $\varepsilon$, а затем после некоторых преобразований, приравнивая коэффициэнты при одинаковых степенях $\varepsilon$, для определения $U_k(t,x),\ k=0,1,2,...,n$, имеем рекуррентную последовательность задач:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}=f\left(t,x,U_0,\frac{\partial U_0}{\partial t}\right), \qquad (7_0)$$

$$U_0(0,x)=\phi(x),\ \frac{\partial U_0(0,x)}{\partial t}=\phi(x) \qquad (8_0)$$

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}-\frac{\partial f\left(t,x,U_0,\frac{\partial U_0}{\partial t}\right)}{\partial U}\cdot U_i-\frac{\partial f\left(t,x,U_0,\frac{\partial U_0}{\partial t}\right)}{\partial U_t}\cdot\frac{\partial U_i}{\partial t}= \qquad (7_i)$$
$$=R_i\left(t,x,U_0,\frac{\partial U_0}{\partial t}\right),...,U_{i-1},\frac{\partial U_{i-1}}{\partial t}$$

$$U_i(0,x)=0,\quad \frac{\partial U_i(0,x)}{\partial t}=0,\quad (i=1,2,...,n), \qquad (8_i)$$

где $R_i$ - это коэффициенты в разложении $f\left(t,x,\overline{U_n},\frac{\partial\overline{U}_n}{\partial t}\right)$ по степеням $\varepsilon$.

Предположим, что $\overline{U}^n(t,x,\varepsilon)$ найдено. Функция $\overline{U}_N(t,x,\varepsilon)$ не удовлетворяет, вообще говоря, граничным условиям (3). Для устранения невязки в выполнении этой функцией граничных условий (3) построены вблизи прямых $x=0$ и $x=l$ функции слоев $\overline{\Pi}_n^o\left(t,\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right),\overline{\Pi}_n^l\left(t,\frac{l-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$.

**ТЕОРЕМА.** Пусть

1) для задачи (1) – (3) выполнены условия (А);

2) $\max\limits_{\substack{Q\\ -\infty<y,y_t<+\infty}}\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|,\frac{\partial f}{\partial y_t}\right\}\le M=const$.

Тогда решение задачи (1) – (3) представимо в виде:

$$y(t,x,\varepsilon)=\overline{U_n}(t,x,\varepsilon)+\overline{\Pi}_n^0\left(t,\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\overline{\Pi}_n^l\left(t,\frac{l-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\xi(t,x,\varepsilon),$$

где $\overline{U_n}(t,x,\varepsilon)+\overline{\Pi}_n^0\left(t,\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\overline{\Pi}_n^l\left(t,\frac{l-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ определяются из приближенных решений, $\xi(t,x,\varepsilon)$ – непрерывно дифференцируемая функция, для которой интегралы

$$\int_0^l\int_0^T\left(\frac{\partial\xi(t,x,\varepsilon)}{\partial t}\right)^2 dtdx,\quad \int_0^l\int_0^T\xi^2(t,x,\varepsilon)dtdx \tag{9}$$

равномерно ограничены при $\varepsilon\to 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства оценки (9) воспользуемся следующим уравнением остаточного члена

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-\varepsilon a(x)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=f\left(t,x,\overline{U}_n+\overline{\Pi}_n^0+\overline{\Pi}_n^l+\xi,\frac{\partial\left(\overline{U}_n+\overline{\Pi}_n^0+\overline{\Pi}_n^l+\xi\right)}{\partial t}\right)-$$
$$-f\left(\overline{U}_n+\overline{\Pi}_n^0+\overline{\Pi}_n^l,\frac{\partial\left(\overline{U}_n+\overline{\Pi}_n^0+\overline{\Pi}_n^l\right)}{\partial t}\right)+H(t,x,\varepsilon) \tag{10}$$

с начальными и краевыми условиями

$$\xi(0,x,\varepsilon)=0,\quad \frac{\partial\xi(0,x,\varepsilon)}{\partial t}=0 \tag{11}$$

$$\xi(0,x,\varepsilon)=0,\quad \xi(t,l,\varepsilon)=0, \tag{12}$$

где $H(t,x,\varepsilon)$ – функция, полученная из приближенных решений и ограничена в области $Q$ при $\varepsilon\to 0$.

Обе части (10) разделим на $a(x)\geq\lambda>0$, умножим на $\frac{\partial\xi}{\partial t}e^{-\gamma t}$, где $0<\gamma<\lambda$ и проинтегрируем по $t$ от $0$ до $T$, по $x$ от $0$ до l, получим:

$$\int_0^l\int_0^T \frac{1}{a(x)}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}\cdot e^{-\gamma t}dtdx-\varepsilon\int_0^l\int_0^T\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}\cdot e^{-\gamma t}dtdx=\int_0^l\int_0^T\frac{1}{a(x)}\cdot$$

$$\cdot\left[f\left(t,x,\overline{U}_n+\overline{\Pi}_n^0+\overline{\Pi}_n^l+\xi,\frac{\partial\left(\overline{U}_n+\overline{\Pi}_n^0+\overline{\Pi}_n^l+\xi\right)}{\partial t}\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(\overline{t,x,U}_n+\overline{\Pi}_n^0+\ldots+\overline{\Pi}_n^l,\frac{\partial\left(\overline{U}_n+\overline{\Pi}_n^0+\overline{\Pi}_n^l\right)}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial\xi}{\partial t}\cdot e^{-\gamma t}dtdx+ \tag{13}$$

$$+\int_0^l\int_0^T\frac{1}{a(x)}H(t,x,\varepsilon)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}\cdot e^{-\gamma t}dtdx.$$

В полученном выражении (13) первое слагаемое левой части проинтегрируем по частям и учитываем условие (11), а второе слагаемое проинтегрируем два раза по частям и учитываем условие (12). Преобразуем правую часть (13), для этого воспользуемся неравенством

$$|a*b|\le\frac{1}{2\lambda}|a|^2+\frac{\lambda}{2}|b|^2.$$

После некоторых преобразований приведем подобные члены и получим следующее неравенство

$$e^{-\gamma t}\int_0^l\left[\frac{1}{a(x)}\left(\frac{\partial\xi(T,x,\varepsilon)}{\partial t}\right)^2+\varepsilon\left(\frac{\partial\xi(T,x,\varepsilon)}{\partial x}\right)^2\right]dx+\varepsilon\gamma\int_0^l\int_0^T\left(\left(\frac{\partial\xi(T,x,\varepsilon)}{\partial x}\right)^2\right)*$$

$$*e^{-\gamma t}dtdx+\int_0^l\int_0^T\left[e^{-\gamma t}\frac{\gamma}{a(x)}-\left(\frac{mt}{\lambda}+1\right)\right]\left(\left(\frac{\partial\xi(T,x,\varepsilon)}{\partial t}\right)^2\right)dtdx\le \tag{14}$$

$$\frac{1}{\lambda^2}\int_0^l\int_0^T\left|H(t,x,\varepsilon)\right|^2\cdot e^{-2\gamma t}dtdx.$$

Функция $H(t,x,\varepsilon)$ - ограниченная величина при $\varepsilon\to 0$, следовательно

$$\int_0^l\int_0^T\left|H(t,x,\varepsilon)\right|^2dtdx\le K_1.$$

Здесь и ниже $K_1,K_2,K_3,K_4$ – некоторые положительные постоянные, не зависящие от $\varepsilon$.

Полагая в левой части выражения (14)

$$e^{-\gamma t}\frac{\gamma}{a(x)}-\left(\frac{mt}{\lambda}+1\right)>0$$

получим при $\varepsilon\to 0$ ограниченность интегралов:

$$\int_0^l \int_0^T \left| \left( \frac{\partial \xi(T,x,\varepsilon)}{\partial t} \right) \right|^2 dtdx \le K_2 \tag{15}$$

$$\int_0^l \left( \frac{\partial \xi(T,x,\varepsilon)}{\partial t} \right)^2 dx \le K_3.$$

Так как $\xi(0,x,\varepsilon)=0$, то $\xi(t,x,\varepsilon)=\int_0^t \frac{\partial \xi(S,x,\varepsilon)}{\partial S} dS$.

Возводя это в квадрат, используя неравенство Буняковского и неравенство (15), имеем

$$\int_0^l \int_0^T \xi^2(t,x,\varepsilon)dtdx \le T^2 \int_0^l \int_0^t \left( \frac{\partial \xi(T,x,\varepsilon)}{\partial t} \right)^2 dtdx \le T^2 \cdot K_2 = K_4.$$

Теорема доказана.

**Список использованных источников**


1. Брюно А.Д. Асимптотическое решение нелинейных уравнений и идемпотентная математика Препринт ИПМ №56, Москва, 2013.
2. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Об асимптотике решения краевых задач для Квазилинейных дифференциальных уравнений. ДАН, 1958, т.121, №5.
3. Иманалиев М.И., Панков П.С. Явление вращающегося пограничного слоя в теории сингулярно-возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений //Доклады АН СССР, 1986, том 289, №3. – С.536-538.
4. Кененбаева Г.М. Доказательная аппроксимация ломаными кривых и границ двумерных областей //Препринт № 16 СОАН СССР. Информационно–оперативный материал. Часть 1 (интервальный анализ), Красноярск, 1990. – С.15-18.
5. Кененбаева Г.М., Касымова Т.Д., Аскар К.Л. Классификации применения компьютеров в математических исследованиях //Проблемы современной науки и образования. 2016, №1(43). - С. 23-30.
6. Назаркулова Б. Асимптотическое решение нелинейного уравнения в частных производных первого порядка. //Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. Естественно-технические науки. –Бишкек: 2010, Серия3. – Вып.4. –С.37 – 41.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1972.
8. Треногин В. А. Об асимптотике решений квазилинейных гиперболических уравнений с гиперболическим погранслоем. // Труды МФТИ «Исследование по механике и прикладной математике». – М.: 1962, В.9.
9. Kenenbaeva G.M., Kasymova T.J. COMPUTER MODELING OF PHENOMENA IN DYNAMICAL SYSTEMS. //Наука, техника и образование. 2015, №12(18). - С. 7-11.