УДК 517.91:51-7 **DOI: 10.33942/sit042203**

ФУНКЦИОНАЛДЫК ӨЗ АРА БАЙЛАНЫШТАР АРКЫЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ БОЛЖОЛ МЕНЕН ЧЫГАРУУ

Э. Кененбаев, КР УИА Математика институтунун аспиранты, Бишкек, Кыргызстан

elaman0527@gmail.com

Аннотация. *Дифференциалдык теңдемелер үчүн ар кандай маселелерди белгилүү бир функциялардын көптүгүндө берилген маанилерге ээ болгон функцияларды издөө катары көрсөтүүгө болот (баштапкы маселелер, чектик маселелер). Мындай маселе жалпы түрдө каралып, функционалдык өз ара байланыштардын колдонулушу изилденет. Ошондой эле, жыйынтыктын катасы баштапкы маалыматтардын катасы боюнча бааланат.*

Ачкыч сөздөр: *дифференциалдык теңдеме, функционалдык өз ара байланыштар, баштапкы маселе, чектик маселе, болжол менен эсептөө, баалоо*

УДК 517.91:51-7

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Э. Кененбаев, аспирант Института математики НАН КР Бишкек, Кыргызстан

elaman0527@gmail.com

Аннотация. *Различные задачи для дифференциальных уравнений могут быть представлены как поиск функции из некоторого множества функций, имеющей данные значения на данном множестве (начальные задачи, краевые задачи). Такая задача рассматривается в общем виде, исследуется применение функциональных сотношений. Также, оценивается погрешность результата по отношению к погрешности исходных данных.*

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, функциональное соотношение, начальная задача, краевая задача, приближенные вычисления, оценивание*

УДК 517.91:51-7

APPROXIMATE SOLVING OF DIFFERENTIAL EQUATIONS BY MEANS OF FUNCTIONAL RELATIONS

E. Kenenbaev, Mathematics Institute of NAS KR, Bishkek, Kyrgyz Republic

elaman0527@gmail.com

Annotation. *Various tasks for differential equations can be presented as searching for a function of any set of functions having given values on a given set (initial value problems, boundary value problems). Such task is considered in general case, using functional relations in investigated. Also, error of result with respect to errors of given values is estimated.*

Keywords: *differential equation, functional relation, initial value problem, boundary value problem, approximate calculations, estimation*

Введение

Различные задачи для дифференциальных уравнений можно представить в общем виде следующим образом. Даны (определены) множество F функций $X \to Z$ (общее решение дифференциального уравнения), подмножество $X_0 \subset X$ и функция $u_0{:}X_0 \to Z$. Найдите такую функцию $u \in F$, что ее ограничение на множество X_0 совпадает с функцией X_0. Функция u_0 представляет собой начальные, граничные или другие условия.

Мы предлагаем использовать функциональные соотношения для некоторых из таких задач.

В первом разделе представлена общая постановка задачи.

Второй раздел содержит новое, более общее определение функциональных соотношений и операций над ними.

Третий раздел содержит примеры объектов, описываемых дифференциальными уравнениями, функциональные соотношения для них и их применение для приближенного вычисления значений функций.

1. Постановка задачи

Даны или определены:

- наборы X и Z;

- множество F функций u: $X \to Z$;

- подмножество $X_0 \subset X$;

функция u_0: $X_0 \to Z$.

T1) найти такую функцию $u(x) \in F$, что ограничение $u(x)$ на X_0 совпадает с функцией $u_0(x)$;

T2) для доказательства единственности $u(x)$;

T3) если это невозможно, то найти такие максимально большие X_1, $X_0 \subset X_1 \subset X$, что существует такое $u(x) \in F$, что его ограничение на X_0 совпадает с функцией $u_0(x)$ и его ограничение на X_1 единственно .

T4) если X, X_0 и Z — топологические пространства, докажите корректность задачи.

T5) если X, X_0 и Z — метрические пространства, оценить погрешность функции $u(x)$ относительно погрешности функции $u_0(x)$.

Обозначим $R:=(-\infty,\infty)$, $R+:=[0,\infty)$, C — пространство комплексных чисел; ε — малое положительное число. В квадратных скобках будем обозначать функции целого аргумента.

2. Функциональные соотношения и операции с ними

Функциональное соотношение в самом общем случае можно записать следующим образом.

Пусть Q — множество некоторых подмножеств множества X.

Определение 1. Функция $g{:}W \to Z$, где $W \in Q$ называется функциональным элементом для множеств X и Z и семейства множеств Q.

Определение 2. Пусть P — предикат, определенный на функциональных элементах тройки (X, Z, Q). Если все ограничения функции $f{:}X \to Z$ на $W \in Q$ удовлетворяют P, то говорят, что функция f удовлетворяет функциональ-ному соотношению P.

Эти определения обобщают определения, данные в [1] (конечные множества есть только в Q).

Помимо известных логических операций, распространяемых на предикаты P, могут быть определены специфические операции над функциональными соотношениями.

1. Операция первого рода:

Бинарная операция над функциональным соотношением P может быть записана в общем виде как частично определенный оператор $\Lambda{:}Q \times Q \to Q$, который строит множество $\Lambda(W_1,W_2)$ как подмножество $W_1 \cup W_2$.

Такие операции переводят множество Q в себя.

2. Операция второго рода:

Бинарная операция над функциональным соотношением P может быть записана в общем виде как частично определенный оператор $\Lambda{:}Q \times Q \to Q_2$, который порождает новое функциональное соотношение множества Q_2 и соответствующий предикат P_2, которые являются логическими следствиями функционального соотношения P. множество $\Lambda(W1,W2)$ также является подмножеством $W1 \cup W2$, но не принадлежит Q.

Такие операции порождают новые функциональные соотношения.

Пример 1. Операция «продолжения» для конечных множеств W. Некоторые предикаты удовлетворяют условию:

Если $(x[1], x[2], \ldots, x[n-1], x[n]) \in Q$ и $(x[2], x[3], \ldots, x[n-1], x[n], x[n+1]) \in Q$ то

$(x[1], x[3], \ldots, x[n-1], x[n], x[n+1]) \in Q$.

Таким образом, получаем операцию первого рода:

$$\Lambda\, ((x[1], x[2], \ldots, x[n-1], x[n]),(x[2], x[3], \ldots, x[n-1], x[n], x[n+1]))=$$
$$= (x[1], x[3], \ldots, x[n-1], x[n], x[n+1]).$$

Пример2. Операция «склеивания» для множеств W четного числа членов.

Если $(x[1], x[2], \ldots, x[n], x[n+1], \ldots, x[2n-1], x[2n]) \in Q$ и

$(x[n+1], \ldots, x[2n, x[2n+1] , \ldots, x[3n]) \in Q$ то рассмотрим множество

$$(x[1], x[2], \ldots, x[n-1], x[n], x[2n+1] , \ldots, x[3n]).$$

Таким образом, мы получаем операцию, которая может быть, как первого рода, так и второго рода:

Λ *((x[1], x[2], …, x[n], x[n+1],…, x[2n–1], x[2n]),*

(x[n+1],…, x[2n], x[2n+1] ,…, x[3n])) =

= (x[1], x[2], …, x[n–1], x[n], x[2n+1] ,…, x[3n]).

3.Различные функциональные соотношения и их приложения

3.1. Аналитические функции. Пусть $X=Z=C$. Основными дифференциальными уравнениями являются уравнения Коши-Римана (см. [2]) для действительной и мнимой частей функции. Основным функциональным соотношением (для бесконечного множества точек) является интегральная формула Коши (см. [1])

$$u(x)=1/(2\pi i) \int_{\gamma} u(s)/(x-s)\cdot ds \qquad (1)$$

где $\gamma \subset C$ — любой контур, огибающий точку x.

Здесь Q — множество множеств $W=\gamma \cup \{x\}$, состоящих из гладких замкнутых контуров с точкой внутри; предикат P представлен как (1).

Операция первого рода: если $W_1=\gamma_1 \cup \{x_1\}$ и $W_2=\gamma_2 \cup \{x_2\}$ и x_2 лежит внутри γ_1 то $\Lambda(W_1,W_2)=\gamma_1 \cup \{x_2\}$.

Известно следующее. Если X_0 содержит предельную точку, то решение единственно.

В [3] поставлена задача Т5 оптимально восстановить аналитическую функцию по ее значениям на части границы, известной с ошибкой.

3.2. Полиномы. Пусть $X = Z = R$. Дифференциальное уравнение для полинома n-й степени имеет вид $u^{(n+1)}(x)=0$. Основным функциональным соотношением является полином Лагранжа

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(x-x[1])\ldots(x-x[k-1])(x-x[k+1])\ldots(x-x[n+1])}{(x[k]-x[1])\ldots(x[k]-x[k-1])(x[k]-x[k+1])\ldots(x[k]-x[n+1])} u(x[k]). \qquad (2)$$

Множество X_0 — это любое множество из $(n+1)$ точек. Равенство (2) дает решения задач Т1, Т2 и Т4.

Здесь Q — множество множеств W, состоящих из $(n+2)$ точек $(x[1], x[2],\ldots,x[n+2])$; предикат P представлен в виде (2) с $x= x[n+2]$.

Если ошибки $u(x_k)$, $k=1..n+1$ оцениваются как ε, то ошибка $u(x)$ оценивается как (Т5)

$$E(x) = \varepsilon \sum_{k=1}^{n+1} \frac{|(x-x[1])\ldots(x-x[k-1])(x-x[k+1])\ldots(x-x[n+1])|}{|(x[k]-x[1])\ldots(x[k]-x[k-1])(x[k]-x[k+1])\ldots(x[k]-x[n+1])|}.$$

Например, если $n=1$ то

$$E(x) = \varepsilon\frac{|x-x[1]|+|x-x[2]|}{|x[2]-x[1]|}.$$

Это показывает, что ошибка интерполяции меньше ошибки экстраполяции.

3.3. Пусть $X=Z=\boldsymbol{R}$. Решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения. Первый результат о функциональной связи значений решения в различных точках был получен Ж. Де ла Валле Пуссеном (см., например, [4]).

Уравнение

$$u^{(n)}(x)+p_1(x)\,u^{(n-1)}(x)+\ldots+p_n(x)\,u(x) = 0,\ \ a\le x\le b, p_k(x)\in C[a,b], \quad (3)$$

с условиями

$$u(x[i]) = c[i],\ i=1,\ldots,n, \quad (4)$$

$c[i],\ i=1,\ldots,n$ действительные числа, имеет единственное решение при следующих ограничениях на нормы коэффициентов-функций

$$\|p_1\|_{[a,b]}(b-a)+\|p_2\|_{[a,b]}(b-a)^2/2!+\ldots+\|p_n\|_{[a,b]}(b-a)^n/n! < 1. \quad (5)$$

Здесь Q — множество множеств W из $(n+1)$ точек $(x[1], x[2],\ldots,x[n+1])$, таких, что n из них лежат на отрезке $[a,b]$, удовлетворяющем (5).

Предикат P для функции u: $W\to R$ следующий. Без ограничения общности точки $(x[1], x[2],\ldots,x[n])$ лежат на отрезке $[a,b]$, удовлетворяющем (5).

$P(u)$:=«$u(x[n+1])$ — значение решения дифференциального уравнения (3) при условиях: задано $u(x[i]),\ i=1,\ldots,n$».

Операция первого рода: если пересечение отрезков $[a_1,b_1]$ для W_1 и $[a_2,b_2]$ для W_2 не пусто и существует отрезок $[a_3,b_3]\supset[a_1,b_1]\cap[a_2,b_2]$, удовлетворяющих (5) и содержащих n или более точек W_1 и W_2, то n из них можно перевести в $\Lambda(W_1,W_2)=\gamma_1\cup\{x_2\}$.

Здесь Q — множество множеств W из $(n+1)$ точек $(x[1], x[2],\ldots,x[n+1])$, таких, что n из них лежат на отрезке $[a,b]$, удовлетворяющем (5).

Предикат P для функции u: $W\to R$ следующий. Без ограничения общности точки $(x[1], x[2],\ldots,x[n])$ лежат на отрезке $[a,b]$, удовлетворяющем (5).

$P(u)$:=«$u(x[n+1])$ — значение решения дифференциального уравнения (3) при условиях: задано $u(x[i]),\ i=1,\ldots,n$».

Операция первого рода: если пересечение отрезков $[a_1,b_1]$ для W_1 и $[a_2,b_2]$ для W_2 не пусто и существует отрезок $[a_3,b_3]\supset[a_1,b_1]\cap[a_2,b_2]$, удовлетворяющих (5) и содержащих n или более точек W_1 и W_2, то n из них можно перевести в $\Lambda(W_1,W_2)=\gamma_1\cup\{x_2\}$.

3.4. Уравнения в частных производных. Пусть $X=Z=\mathbf{R}^2$.

$$u_{xy}''(x,y)=0. \tag{6}$$

Известно, что

$$u(x,y)+u(x+g,y+h)\equiv u(x+g,y)+u(x,y+h) \tag{7}$$

для решений уравнения (6) при всех $x,y \in R;\ g,\ h \in R{+}{+}$.

Обозначим $z=(x,y)\in R^2$; для (7)

$$g\ [1] = (x,\ y);\ z[2]=(x+g,y);z[3]=(x,y+h);\ z[4]=(x+g,y+h).$$

$$z[1]=(x,y);\ z[2]=(x+g,y);z[3]=(x,y+h);\ z[4]=(x+g,y+h).$$

Здесь $Q=Q_2$ — множество множеств W из четырех точек $\{z[1],\ z[2],\ z[3],z[4]\}$, расположенных в виде координатного прямоугольника.

Обозначим через Q_1 подмножество множества Q_2 с ограничением $g,h<v$.

Познакомить с операторами «прилипания».

Здесь $Q=Q_2$ — множество множеств W из четырех точек $\{z[1],\ z[2],\ z[3],z[4]\}$, расположенных в виде координатного прямоугольника.

$$\Lambda_x(((x,y),(x+g,y),(x,y+h),(x+g,y+h)),$$

$$((x+g,y),\ (x+2g,y),(x+g,y+h),(x+2g,y+h)))=$$

$$=((x,y),\ (x+2g,y),(x+2g,y+h),(x+2g,y+h)))$$

и

$$\Lambda_y(((x,y),\ (x+g,y),(x,y+h),(x+g,y+h)),$$

$$((x,y+h),\ (x+g,y+h),(x,y+2h),(x+g,y+2h)))=$$

$$=((x,y),\ (x+g,y),(x+g,y+2h),(x+g,y+2h))).$$

Для Q_2 это операторы первого рода.

Для Q_1 эти операторы порождают Q_2 и относятся ко второму типу.

Рассмотрим пример успешного расширения множества X_0 начальных условий с помощью функционального соотношения (7).

П р и м е р 3. Пусть $X_0 = \{(x,y),\ (x+g,y),\ (x,\ y+h),\ (x+g+u),\ (y+h+v)\}$.

Если значения решения (6) заданы в точках X_0, то можно найти значение $u(x+g,y+h)$ и значение $u(x+g+u,y+h+v)$.

Если все начальные значения заданы с ошибкой ε, то ошибка $u(x+g,y+h)$ оценивается как 3ε, а ошибка $u(x+g,y+h)$ оценивается как 5ε.

Заключение

Полученные результаты демонстрируют возможность применения функциональных соотношений в различных задачах теории обыкновенных уравнений и уравнений в частных производных. Они порождают новые структуры в этой теории. Кроме того, они иногда дают строгие оценки ошибок.

Список использованных источников

1. Панков П.С., Матиева Г.М., Сабирова Х.С. Аксиоматическая теория характеристики ее применение к аналитическим функциям // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 33. – Бишкек: Илим, 2004. – С. 37-42.
2. Ahlfors L. V. Complex Analysis, an Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable. - New York: McGraw-Hill, 1979. - 331 p.
3. Акопян Р. Р. Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям // Математические заметки, 2016, 99(2), с. 163-170.
4. Бессмертных Г. А. О существовании и единственности решений многоточечной задачи Валле–Пуссена для нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1970, том 6, № 2, с. 298–310.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, 4-е издание. – Москва: Наука, 1972. – 288 с. – Глава I. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными 2-го порядка. – С. 11-22.