DOI:10.33942/sit042277 **УДК.: 519.925**

АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Тагаева С.Б.
к.ф.-м.н., Институт математики НАН КР, **tagaeva_72@mail.ru**

Аннотоция. *Некоторые явления были открыты с помощью физических, химических и технических экспериментов, а потом были объяснены и обоснованы с помощью математических моделей (в особенности - дифференциальных уравнений). Также, некоторые явления были обнаружены с помощью компьютерных экспериментов, а потом обоснованы другими методами. В Кыргызстане было дано общее определение математического явления. Вместе с тем, компьютер - самостоятельный реальный объект, явления на нем - специфические. Пример явления на гладкой поверхности, не принадлежащей эвклидову пространству, описан в статье. Рассматриваются системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями на гладких поверхностях. В частности, рассматривается система, представляющая взаимное отталкивание точек в очень вязкой среде. В некоторых случаях доказано существование гладкого решения на полуоси. Построен алгоритм, автоматически определяющий наличие некоторых явлений.*

Ключевые слова*: обыкновенное дифференциальное уравнение; начальная задача; разрывная функция; решение; нелинейное уравнение; алгоритм; явление.*

ҮЗГҮЛГӨН ОҢ БӨЛҮКТӨРҮ БАР СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ЖӨНӨКӨЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН КАСИЕТТЕРИН АНЫКТОО АЛГОРИТИМДЕРИ

Тагаева С.Б.
КР УИА Математика институту, физика-математика илимдеринин кандидаты, **tagaeva_72@mail.ru**

Аннотация. *Кээ бир кубулуш физикалык, химиялык жана техникалык тажрыйбалар аркылуу ачылды, андан кийин математикалык моделдер (алардын ичинде дифференциалдык теңдемелер) аркылуу же эсептөөчү эксперименттер аркылуу түшүндүрүлдү жана негизделди. Кыргызстанда математикадагы кубулуштун жалпы аныктоосу берилди. Ошондой эле, кээ бир кубулуш компьютердеги эксперименттер аркылуу табылды, андан кийин башка ыкмалар аркылуу негизделди. Аны менен бирге, компьютер өз алдынча чыныгы объект, андагы кубулуш айрыкча. Макалада эвклиддик мейкиндикке таандык болбогон жылмакай бетте кубулуштун мисалы жазылды. Оң жактары үзгүл болгон кадимки дифференциалдык теңдемелер системалары жылмакай беттерде каралат. Ошону менен катар, абдан жабышкак чөйрөдө чекиттердин түртүшүүнү чагылдыруучу система каралат. Кээ бир учурда жылма чыгарылыштын жарым окто бар болуусу далилденген. Кээ бир кубулуштардын бар болуусун автоматча аныктоочу алгоритм курулган.*

Өзөктүү сөздөр*: кадимки дифференциалдык теңдеме; баштапкы маселе; үзгүлтүк функци; жылмакай бет; чыгарылыш; сызыктуу эмес теңдеме; алгоритм; кубулуш.*

ALGORITHMS TO DETECT PROPERTIES OF SOLUTIONS OF NON-LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL УРАВНЕНИЯ WITH DISCONTINUOUS RIGHT HAND PARTS

Tagaeva S.B.
candidate of physical-mathematical sciences, KR NAS Institute of Mathematics, tagaeva_72@mail.ru

Abstract. *Some phenomena were discovered by physical, chemical and technical experiments and further were explained and substituted by mathematical models, especially by means of differential equations, or by computational experiments. Also, some phenomena were discovered by computer experiments and further substituted by other methods. A general definition of a mathematical phenomenon was proposed in Kyrgyzstan. Meanwhile, the computer is a self-standing real object and phenomena on it are specific ones. An example of phenomena on a smooth surface not belonging to Euclidean space is described in the paper. Considered systems of ordinary differential equations with discontinuous right hand parts on smooth surfaces. Particularly, a system presenting mutual repelling of points charges in very viscous media is considered. Existence of a smooth solution on a half-axis is proven in come cases. An algorithm to detect existence of some phenomena is constructed in the paper.*

Keywords*: ordinary differential equation; initial value problem; discontinuous function; solution; nonlinear equation; algorithm; phenomenon.*

Введение. В науке важную роль играют «явления». Некоторые явления были открыты с помощью физических, химических и технических экспериментов, а потом были объяснены и обоснованы с помощью математических моделей (в особенности - дифференциальных уравнений). Также, некоторые явления были обнаружены с помощью компьютерных экспериментов, а потом обоснованы другими методами.

В Кыргызстане было дано общее определение математического явления [1]. Вместе с тем, ранее не были известны методы объективного определения наличия явления, они определялись неформально путем наблюдения за реальным или компьютерным экспериментом. Построение такого алгоритма для одного из видов явлений - обнаруженного нами возникновения упорядочения точек на плоскости - паттернов [2] является целью настоящей работы.

Для поиска явлений в теории дифференциальных уравнений необходимо рассматривать особые виды уравнений, например [3], [4]. Мы предложили рассматривать системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями [5].

В данной статье предлагаются более общие уравнения - на гладких поверхностях.

В частности, рассматривается система, представляющая взаимное отталкивание точек в очень вязкой среде. В некоторых случаях доказано существование гладкого решения на полуоси.

Поскольку достаточно сложные системы дифференциальных или интегральных уравнений невозможно решить аналитически, они приближенно заменяются конечномерными - разностными уравнениями, см. например [6], которые потом также решаются приближенно с использованием компьютера.

Вместе с тем, компьютер - самостоятельный реальный объект, явления на нем - специфические. Таким образом, явления, обнаруженные на нем, следует рассматривать, как «компьютерные».

Пример явления на гладкой поверхности, не принадлежащей эвклидову пространству, описан в статье. Рассматриваются системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями на гладких поверхностях. Построен алгоритм, автоматически определяющий наличие некоторых явлений, с его помощью подтверждено и уточнено открытие [2].

1. Локально Эвклидовы пространства и дифференциальные уравнения на них

Пусть Ω - метрическое пространство с метрикой $\rho(u,v)$ со следующими свойствами: существует такое $\varepsilon>0$, что для любой точки $z\in\Omega$ ее окрестность изометрична следующей поверхности в R^3

$$S_z=\{(x,y,\ x^2A(x,y)+xyB(x,y)+y^2C(x,y))|\ x^2+y^2\leq\varepsilon^2\} \qquad (1)$$

или следующей кривой в R^2

$$W_z=\{(x,\ x^2P(x))\ |\ x^2\leq\varepsilon^2\}, \qquad (2)$$

где $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$, $P(x)$ - гладкие функции.

Рассмотрим уравнения вида

$$U'(t)=F(U(t)),\ t\geq 0,\ U(t)\in\Omega \qquad (3)$$

с начальным условием

$$U(0)=u_0\in\Omega, \qquad (4)$$

где F - заданная функция.

О п р е д е л е н и е. Производная в (3) «вдоль Ω» понимается в следующем смысле:

I. Для уравнения (1) функция $F\colon \Omega\to R^2$. Для некоторого значения $t\geq 0$ пусть

$$U(t)=(x,y,\ x^2A(x,y)+xyB(x,y)+y^2C(x,y)),\ \ F(U(t))=\{h\cos\alpha,\ h\sin\alpha\}.$$

Пусть $\tau>0$ - бесконечно малая величина. Тогда

$$U(t+\tau)=(x+h\tau\cos\alpha,\ y+h\tau\sin\alpha,\ (x+h\tau\cos\alpha)^2\times$$
$$\times A(x+h\tau\cos\alpha,\ y+h\tau\sin\alpha)+(x+h\tau\cos\alpha)(y+h\tau\sin\alpha)B(x+h\tau\cos\alpha,$$
$$y+h\tau\sin\alpha)+(y+h\tau\sin\alpha)^2C(x+h\tau\cos\alpha,\ y+h\tau\sin\alpha)).$$

II. Для уравнения (2) функция $F\colon \Omega\to R$. Для некоторого значения $t\geq 0$ пусть

$$U(t)=(x,\ x^2P(x)),\quad F(U(t))=h.$$

Пусть $\tau>0$ - бесконечно малая величина. Тогда

$$U(t+\tau)=(x+h\tau,\ (x+h\tau)^2P(x+h\tau)).$$

Также мы будем рассматривать системы уравнений на гладких поверхностях, вида

$$U_i'(t)=F_i(U_1(t),\ U_2(t),\dots,\ U_n(t)),\ t\geq 0,\quad i=1..n, \qquad (5)$$

с начальными условиями

$$U_i(0)=u_{0i} \in \Omega, \ i=1..n, \qquad (6)$$

Функции F_i будут представляться в виде

$$F_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Sigma_{j\neq i} G(u_i,u_j). \qquad (7)$$

Цель настоящей статьи - рассмотреть системы уравнений с разрывной правой частью: $lim\{ ||G(u,v)|| \mid \rho(u,v)\to 0\}=\infty$.

Тогда для начальных условий (6) должно быть:

$$u_{0i}\neq u_{0j}, \ i\neq j. \qquad (8)$$

2. Система дифференциальных уравнений отталкивания электрических зарядов на гладкой поверхности

Рассматриваются одноименные электрические точечные заряды на гладкой поверхности Ω, отталкивающиеся по закону, связанному с законом Кулона.

Примечание: гладкая поверхность Ω в целом может не принадлежать Эвклидову пространству.

Определение функции $G(u,v)$. Если $\rho(u,v)\leq \varepsilon$, $\varepsilon>0$ - заданное число, то проводим плоскость P через точку v и нормаль к поверхности Ω в точке u. Вектор $G(u,v)$ является проекцией на касательную к поверхности Ω в точке u, лежащую в плоскости P, вектора, имеющего направление $(v-u)$ и длину $\rho^{-2}(u,v)$.

Если поверхность Ω - локально плоская (то есть каждая точка имеет ε-окрестность, изометрическую с кругом $x^2+y^2\leq \varepsilon^2$, то

$$G(u,v)=(v-u)/||v-u||^{5/2}. \qquad (9)$$

Если $\rho(u,v) > \varepsilon$, то $G(u,v)=0$.

Таким образом, получаем систему (5)-(7)-(9) с начальными условиями (6) и требованием (8).

3. Алгоритм и его использование

Для определения паттернов в метрических пространствах мы предлагаем

Алгоритм. Пусть дано конечное множество точек $\{z[1].. \ z[K]\}$ в локально Эвклидовом пространстве E. Выберем константу $v>1$.

A) Находим массив - минимум расстояний от данной точки до других

$$M[i]:=min\{\rho(z[i], [j]): j\neq i \}, 1\leq i\leq K.$$

B) Вычисляем количество соседей для каждой точки

$$C[i]:=card\{j: M\leq \rho(z[i], [j])\leq Mv\}, i=1..K.$$

C) Вычисляем среднее

$$W:=\Sigma\{ C[i]: i=1..k\}/K.$$

D) на этом алгоритм работу оканчивает.

Вывод: если большинство чисел $C[i]$ равны между собой (число W близко к целому), то это доказывает существование паттерна. Обозначим это число через W_1.

Рассмотрим случай пространства размерности 2 (поверхности).

Если $W_1=3$, то сеть - шестиугольная;

Если $W_1=4$, то сеть - квадратная;

Если $W_1=6$, то сеть - треугольная.

4. Эксперименты с алгоритмом

Проводились эксперименты на плоской поверхности - топологическом торе (квадрат со склеенными противоположными сторонами) для конечно-разностной аппроксимации системы (5)-(7)-(9) со случайными начальными условиями (6), количество шагов = 1000.

Результаты (среднее из пяти запусков программы):

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кол-во Точек	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256
v=1.3, W	2.7	3.2	3.4	3.8	4.4	3.8	4.4	4.0	4.4	3.9	4.8	4.2
v=1.4, W	3.5	3.8	4.0	4.1	4.4	4.1	4.7	4.0	5.0	4.0	5.2	4.0

5. Заключение

Из результатов эксперимента видна эффективность алгоритма, подтверждение открытия [2]: возникновение закономерностей при количестве точек, большем 100, и чередовании квадратов четных чисел (квадратная сетка) и квадратов нечетных чисел (близкая к треугольной сетка). Такие алгоритмы могут быть построены и для других процессов типа иргөө.

ЛИТЕРАТУРА:

1. **Pankov P. S., Kenenbaeva G. M.** *Hypothesis on effect of "numerosity" and other effects in mathematics // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, 2017, № 5. - С. 60-62.*
2. **Панков П.С., Тагаева С.Б.** *Явление самоупорядочения большого количества отталкиваю-щихся электрических зарядов на топологическом торе // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С.12-17.*
3. **Чечейбаев Б., Исманбаев А.И., Эстебесова Н.Т., Чечейбаева Э.Б.** *Метод малых возмущений для решения задачи ламинарного пограничного слоя течений несжимаемой вязкой жидкости // Вестник КГУСТА. 2019. № 4(66). С. 655-661.*
4. **Какишов Ж.К., Садыкова Б.А., Казакова Ж.У.** *Асимптотические методы решения начальной задачи для сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Вестник КГУСТА. 2019. № 1(63). С. 168-176.*
5. **Тагаева С.** *Системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. – Saarbrűcken, Deutschland: Lap Lambert Academic Publishing, 2018. – 67 с.*
6. **Саадабаев А., Абдылдаева А.Р.** *Конечномерная аппроксимация нелинейного операторного уравнения с приближенно заданной правой частью // Вестник КГУСТА. 2017. № 4(58). - С. 148-151.*
7. **Тагаева С.Б.** *Об условиях гладкости решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // Наука и инновационные технологии. 2018. № 3 (8). - С. 35-38.*
8. **Tagaeva S.B.** *Implementation of algorithm to detect patterns in irgöö-type processes // Herald of Institute Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic. 2022. № 1.- С. 142-147.*
9. **Tagaeva S.B.** *Improved algorithm to detect patterns in irgöö-type processes // Herald of Institute Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic. 2022. № 2.- С. 92-96.*
10. **Kenenbaeva G.M., Tagaeva S.B.** *On constants related to effect of "numerosity"// Herald of Institute Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic. 2021. № 1.- С. 10-16.*

Рецензент: Панков Павел Сергеевич, член-корреспондент НАН КР, д.ф.-м.н., профессор, заведующий лабораторией «Вычислительная математика», Институт математики НАН КР, pps5050@mail.ru