DOI:10.33942/sit042332 **УДК.: 519.925**

УСЛОВИЯ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Тагаева С.Б.
к.ф.-м.н., Институт математики НАН КР, tagaeva_72@mail.ru

Аннотоция. *В статье выявлен такой класс систем нелинейных уравнений, что их правые части разрывны, а решения существуют и являются гладкими на всем интервале определения аргумента. В частном случае такие системы уравнений описывают распределение дискретных электрических зарядов. Проведен численный эксперимент, подтвердивший полученные результаты.*

Ключевые слова*: обыкновенное дифференциальное уравнение, разрывная функция, гладкое решение, численный эксперимент.*

ОҢ ЖАКТАГЫ БӨЛҮКТӨРҮ ҮЗГҮЛТҮКТҮҮ БОЛГОН СЫЗЫКТУУ ЭМЕС КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАЛАРЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ЖЫЛМАКАЙЛЫГЫНЫН ШАРТТАРЫ

Тагаева С.Б.
КР УИА Математика институту, физика-математика илимдеринин кандидаты,tagaeva_72@mail.ru

Аннотация*. Макалада оң жактагы бөлүктөрү үзгүлтүктүү, бирок аргументтин аныктоосунун бардык аралыгында аныкталган жана жашаган чыгарылыштары болгон сызыктуу эмес теңдемелер системаларынын классы табылды. Жеке учурда мындай теңдемелер системалары айрым электр заряддарынын бөлүштүрүүсүн баяндап жазат. Алынган натыйжаларды ырастаган эсептөөчү эксперимент өткөрүлдү.*

Өзөктүү сөздөр*: кадимки дифференциалдык теңдеме, үзгүлтүк функция, жылмакай чыгарылыш, эсептөөчү эксперимент.*

CONDITIONS OF SMOOTHNESS OF SOLUTIONS OF SYSTEMS OF NON-LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS RICHT HAND PARTS

Tagaeva S.B.
candidate of physical-mathematical sciences, KR NAS Institute of Mathematics, tagaeva_72@mail.ru

Abstract. *In the paper, such classes of systems of non-linear equations are revealed that their right hand parts are discontinuous but their solutions exist and are smooth within all the domain of argument. In particular cases such systems of equations describe distributions of discrete electrical charges. A numerical experiment substituting obtained results was conducted.*

Keywords*: ordinary differential equation, discontinuous function, smooth solution, numerical experiment.*

Введение. Во многих работах были получены условия существования, непрерывности и гладкости решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в зависимости от аналогичных условий на правые части таких уравнений. Также имеюся работы, где правые части уравнений принадлежат более широким классам функций, чем непрерывные, и соответственно доказывается существование решений – обобщенных функций, см. например [1], где описываются классы уравнений типа Каратеодори. Вместе с тем, существуют такие классы систем уравнений, имеющих прикладное значение, что их правые части разрывны, а решения существуют и являются гладкими на всем интервале определения аргумента. В статье выявлены некоторые такие классы. Проведен численный эксперимент, подтвердивший полученные результаты. Постановка задачи предложена в [2].

1. Постановки задач. Обозначим $\boldsymbol{R}=(-\infty,\infty)$, $\boldsymbol{R}_+=[0,\infty)$.

Рассматриваются одноименные одинаковые электрические точечные заряды, движущиеся на прямой $\boldsymbol{R}$, отталкивающиеся по закону Кулона: сила отталкивания рана $F=\omega\frac{E^2}{d^2}$, где E – величина заряда, d – расстояние между зарядами, ω - постоянный кэффициент. Также в некоторых случаях будем считать, что на каждый заряд действует внешняя сила, определяемая непрерывной функцией. Будем считать, что в начальный момент времени заряды расположены в различных точках. Движение зарядов рассматривается как в очень вязкой среде, так и в среде с отсутствием трения. В последнем случае задаются также начальные скорости зарядов. Везде будем предполагать, что $t\in\boldsymbol{R}_+$.

1.1. Случай одного неподвижного (с координатой $x=0$) и одного подвижного заряда (с координатой $x_1(t)>0$), а также с заданной действующей на подвижный заряд силой в очень вязкой среде: уравнение первого порядка

$$x_1'(t)=\frac{a}{x_1^2(t)}+g_1(t), a>0, g_1(t)\in C(\boldsymbol{R}_+), \quad (1)$$

с начальным условием $x_1(0)=z_1>0$. (2)

1.2. Такая же ситуация – в среде с отсутствием трения:

уравнение второго порядка $x_1''(t)=\frac{a}{x_1^2(t)}+g_1(t)$, (3)

с начальными условиями (2) и $x_1'(0)=z_2$. (4)

1.3. Случай двух подвижных зарядов (с координатами $x_1(t)< x_2(t)$), а также с заданными действующими на заряды силами в очень вязкой среде: система двух уравнений первого порядка

$$x_1'(t)=-\frac{a}{\left(x_2(t)-x_1(t)\right)^2}+g_1(t), g_1(t)\in C(\boldsymbol{R}_+), \quad (5)$$

$$x_2'(t)=\frac{a}{\left(x_1(t)-x_2(t)\right)^2}+g_2(t), g_2(t)\in C(\boldsymbol{R}_+),$$

с начальными условиями $x_1(0)=z_1< x_2(0)=z_2$. (6)

1.4. Такая же ситуация – в среде с отсутствием трения: система двух уравнений второго порядка

$$x_1''(t) = -\frac{a}{\left(x_2(t)-x_1(t)\right)^2} + g_1(t), g_1(t) \in C(\boldsymbol{R}_+), \qquad (7)$$

$$x_2''(t) = \frac{a}{\left(x_1(t)-x_2(t)\right)^2} + g_2(t), g_2(t) \in C(\boldsymbol{R}_+),$$

с начальными условиями $x_1(0)= z_1 < x_2(0)= z_2;\ x_1'(0)= v_1,\ x_2'(0)= v_2$. (8)

1.5. Случай двух неподвижных (с координатами $x=0$ и $x=1$) и одного подвижного заряда (с координатой $0<x_1(t)<1$, пока решение существует), а также с заданной действующей на подвижный заряд силой в очень вязкой среде: уравнение первого порядка

$$x_1'(t) = \frac{a}{x_1{}^2(t)} - \frac{a}{\left(1-x_1(t)\right)^2} + g_1(t), a > 0, g_1(t) \in C(\boldsymbol{R}_+),$$

(9)

с начальным условием $x_1(0)= z_1 \in (0;1)$. (10)

1.6. Такая же ситуация – в среде с отсутствием трения:

$$x_1''(t) = \frac{a}{x_1{}^2(t)} - \frac{a}{\left(1-x_1(t)\right)^2} + g_1(t), a > 0, g_1(t) \in C(\boldsymbol{R}_+), \qquad (11)$$

с начальными условиями (10) и $x_1'(0)= z_2$. (12)

1.7. Случай $(n–1)$ подвижных зарядов (с координатами $0<x_1(t)< x_2(t)<\ldots < x_{n-1}(t)<1$, пока решения существуют), и двух неподвижных зарядов (с координатами $x_0=0;\ x_n = 1$) в очень вязкой среде приводит к системе $(n–1)$ уравнений первого порядка

$$x_k'(t) = \sum_{i=0, i\neq k}^{k-1} \frac{a}{\left(x_k(t)-x_i(t)\right)^2} - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{a}{\left(x_k(t)-x_i(t)\right)^2}, \ \ k = 1..n-1 \qquad (13)$$

с начальными условиями $0<x_1(0)= z_1 <x_2(0) = z_2<\ldots < x_{n-1}(t) = z_{n-1}<1$. (14)

1.8. Такая же ситуация – в среде с отсутствием трения: система $(n–1)$ уравнений второго порядка

$$x_k''(t) = \sum_{i=0, i\neq k}^{k-1} \frac{a}{\left(x_k(t)-x_i(t)\right)^2} - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{a}{\left(x_k(t)-x_i(t)\right)^2}, \ \ k = 1..n-1 \qquad (15)$$

с начальными условиями (14) и $x_1'(0)= v_1;\ x_2'(0) = v_2;\ldots < x_{n-1}'(t) = v_{n-1}$.
(16)

Во всех случаях надо доказать, что решения существуют на всей полуоси $\boldsymbol{R}_+$ и при этом заряды не слипаются (существует положительная нижняя граница расстояния между зарядами на каждом ограниченном отрезке).

2. Доказательства существования решений. 2.1. Случай одного неподвижного и одного подвижного заряда в очень вязкой среде.

Теорема 1. Начальная задача (1)-(2) имеет решение в $\boldsymbol{C}^{(1)}(\boldsymbol{R}_+)$.

Доказательство. Выберем любое $T>0$ и обозначим $h_1 := \|g_1(t)\|_{[0,T]}$. Выберем положительное число $p < min\left\{\sqrt{\frac{a}{h_1}}, z_1\right\}$. Предположим, что $min\{x_1(t) | t \in [0,T]\} \leq p$. Обозначим $t_1 \in R_+$ - первая точка такая, что $x_1(t_1)=p$. Тогда имеем: $x_1'(p) \geq \frac{a}{p^2} - h_1 > 0$. Отсюда следует, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ будет $x_1(t_1 - \varepsilon) < p$, что противоречиво. Теорема доказана.

2.2. Случай одного неподвижного и одного подвижного заряда в среде без трения.

Теорема 2. Начальная задача (3)-(2)-(4) имеет решение в $\boldsymbol{C}^{(2)}(\boldsymbol{R}_+)$.

Доказательство. Заменяя $x_2(t)=x_1'(t)$, получаем

$$x_1'(t) = x_2(t), x_2'(t) = \frac{a}{x_1^2(t)} + g_1(t), \tag{17}$$

с начальным условием $x_1(0)= z_1>0, x_2(0)= z_2,$ (18)

или эквивалентную систему интегральных уравнений

$$x_1(t) = z_1 + \int_0^t x_2(s)ds\,, x_2(t) = z_2 + \int_0^t \left(\frac{a}{x_1^2(s)} + g_1(s)\right)ds. \tag{19}$$

Выберем любое $T>0$. Дальше будем рассматривать $t\in[0,T]$. Тогда имеем:

$$x_2(t) \geq z_2 - Th_1.$$

Если $z_2 - Th_1 \geq 0$, то, очевидно, $x_2(t) \geq 0$, $x_1(t)$ возрастает, начальная задача (7)-(8) имеет решение. Будем рассматривать только случай, когда $q:=Th_1-z_2>0, x_2(t)\geq -q$.

Выберем положительное число $p < min\left\{\frac{a}{4(q^2+1)}, \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{h}}, \frac{1}{h_1}, \frac{z_1}{2}\right\}$. Предположим, что

$$min\{x_1(t)|t\in[0,T]\} \leq p. \tag{20}$$

Обозначим $t_1\in\boldsymbol{R}_+$ - первая точка такая, что $x_1(t_1)=p$, $t_2\in R_+$ - последняя точка такая, что $x_1(t_2)=2p$. Тогда $x_1(t)\in[p,2p]$ для $t\in[t_2, t_1]$.

По теореме о среднем, существует такая точка $t^*\in[t_2, t_1]$, что

$$x_1(t_1)-x_1(t_2)= (t_1-t_2)\, x_1'(t^*);\ p-2p= (t_1-t_2)\, x_2(t^*);\ -p\geq(t_1-t_2)(-q);\ p\leq(t_1-t_2)\, q.$$

Отсюда $t_1 - t_2 \geq \frac{p}{q}$. Из (19) оцениваем, учитывая, что $\frac{a}{(2p)^2} - h_1 > 0$:

$$x_2(t_1) = x_2(t_2) + \int_{t_2}^{t_1}\left(\frac{a}{x_1^2(s)} + g_1(s)\right)ds \geq$$

$$\geq -q + (t_1 - t_2)\left(\frac{a}{(2p)^2} - h_1\right) \geq -q + \frac{p}{q}\left(\frac{a}{(2p)^2} - h_1\right) \geq$$

$$\geq -q - \frac{1}{q} + \frac{a}{4pq} > -q - \frac{1}{q} + \frac{1}{q}(q^2 + 1) = 0.$$

Таким образом, из предположения (20) получено, что $x_1'(t_1)>0$, что противоречит предположению (20). Следовательно, начальная задача (3)-(4) имеет положительное решение на любом отрезке $[0, T]$. Отсюда и из локальной единственности решения начальной задачи следует, что начальная задача (3)-(4) имеет положительное решение на всей полуоси $\boldsymbol{R}_+$. Теорема доказана.

2.3. Случай двух подвижных зарядов в очень вязкой среде.

Теорема 3. Начальная задача (5)-(6) имеет решение в $\boldsymbol{C}^{(1)}(\boldsymbol{R}_+\to\boldsymbol{R}^2)$.

Доказательство. Обозначим $w(t):=x_2(t)-x_1(t).$ (21)

Из (5) получаем уравнение $w'(t) = \frac{2a}{w^2(t)} + g_2(t) - g_1(t)$,

с начальным условием $w(0)=z_2-z_1>0$ (22)

- получена начальная задача вида (1)-(2) и заключение теоремы следует из Теоремы 1.

2.4. Случай двух подвижных зарядов в среде без трения.

Теорема 4. Начальная задача (7)-(6)-(8) имеет решение в $\boldsymbol{C}^{(2)}(\boldsymbol{R}_+)$.

Доказательство. С обозначением (21) из (7) получаем уравнение

$$w''(t) = \frac{2a}{w^2(t)} + g_2(t) - g_1(t),$$

с начальными условиями (22) и $w'(0)=v_2-v_1$. Получена начальная задача вида (3)-(2)-(4) и заключение теоремы следует из Теоремы 2.

2.5. Случай двух неподвижных и одного подвижного заряда в очень вязкой среде.

Теорема 5. Начальная задача (9)-(10) имеет решение в $\boldsymbol{C}^{(1)}(\boldsymbol{R}_+)$.

Доказательство. Выберем любое $T>0$ и обозначим $h_1 \coloneqq \|g_1(t)\|_{[0,T]}$.

Выберем положительное число $p < min\left\{\sqrt{\frac{a}{a+h_1}}, z_1, 1-z_1\right\}$.

Предположим сначала, что решение непродолжимо на всю полуось вследствие пересечения с прямой $x=0$. Предположим, что $min\{x_1(t)|t \in [0,T]\} \le p$. Обозначим $t_1 \in R_+$ - первая точка такая, что $x_1(t_1)=p$. Тогда имеем: $x_1'(p) \ge \frac{a}{p^2} - \frac{a}{1} - h_1 > (a+h_1) - a - h_1 = 0$. Отсюда следует, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ будет $x_1(t_1-\varepsilon) < p$, что противоречиво.

Аналогично доказывается, что предположение о том, что решение непродолжимо на всю полуось вследствие пересечения с прямой $x=1$, приводит к противоречию. Следовательно, на любом конечном отрезке решение начальной задачи (9)-(10) удовлетворяет условиям $p<x_1(t)<1-p$ и тем самым продолжимо на всю ось. Теорема доказана.

Поскольку уравнение $0 = \frac{a}{x^2} - \frac{a}{(1-x)^2}$ имеет единственное решение, очевидна

Теорема 6. Для решения начальной задачи (9)-(10) с $g_1(t) \equiv 0$ имеет место

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \frac{1}{2}.$$

2.6. Случай двух неподвижных и одного подвижного заряда в среде без трения.

Тем же методом, что и Теорема 2, доказывается Теорема 7. Начальная задача (11)-(10)-(12) имеет решение в $\boldsymbol{C}^{(2)}(\boldsymbol{R}_+)$.

3. Вычислительный эксперимент и его результаты. Поскольку метод доказательства Теоремы 6 непосредственно не обобщается на случай нескольких зарядов, был проведен вычислительный эксперимент для задачи (13)-(14). Выберем малый шаг $h>0$ и обозначим $X_{kj}=x_k(jh)$, $j=0,1,2,\ldots$. Положим $X_{0j}=0$, $X_{nj}=1$, $j=0,1,2,\ldots$. (22)

Начальные условия (14) принимают вид $X_{10}= z_1$; $X_{20} = z_2$;… $X_{n-1,0} = z_{n-1}$.

(23)

Тогда из (13) получаем вычислительные формулы

$$X_{k,j+1} = X_{kj} + \sum_{i=0,i\neq k}^{k-1} \frac{a}{\left(X_{kj}-X_{ij}\right)^2} - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{a}{\left(X_{kj}-X_{ij}\right)^2}, \ \ k = 1..n-1, j = 0,1,2,\ldots \qquad (24)$$

Расчеты по формулам (22)-(24) с различными n от 4 до 10 и различными начальными условиями позволили выдвинуть следующие гипотезы:

1) Решение задачи (13)-(14) существует на всей полуоси $\boldsymbol{R}_+$.

2) Для любого $n>2$ существует и единственно решение системы алгебраических уравнений и неравенств $X_0=0< X_1 < X_2<\ldots<X_{n-1} <X_n=1$,

$$\sum_{i=0,i\neq k}^{k-1} \frac{1}{(X_k-X_i)^2} - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{\left(X_{kj}-X_{ij}\right)^2} = 0, k = 1..n-1. \qquad (25)$$

3) Решение задачи (13)-(14) сходится к решению системы (25) при $t\to\infty$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. ***Финогенко И.А.*** *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. - Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2022. - 82 с.*
2. ***Панков П.С., Тагаева С.Б.*** *Явление самоупорядочения большого количества отталкиваю-щихся электрических зарядов на топологическом торе // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С.12-17.*
3. ***Чечейбаев Б., Исманбаев А.И., Эстебесова Н.Т., Чечейбаева Э.Б.*** *Метод малых возмущений для решения задачи ламинарного пограничного слоя течений несжимаемой вязкой жидкости // Вестник КГУСТА. 2019. № 4(66). С. 655-661.*
4. ***Какишов Ж.К., Садыкова Б.А., Казакова Ж.У.*** *Асимптотические методы решения начальной задачи для сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Вестник КГУСТА. 2019. № 1(63). С. 168-176.*
5. ***Тагаева С.*** *Системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. – Saarbrűcken, Deutschland: Lap Lambert Academic Publishing, 2018. – 67 с.*
6. ***Саадабаев А., Абдылдаева А.Р.*** *Конечномерная аппроксимация нелинейного операторного уравнения с приближенно заданной правой частью // Вестник КГУСТА. 2017. № 4(58). - С. 148-151.*
7. ***Тагаева С.Б.*** *Об условиях гладкости решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // Наука и инновационные технологии. 2018. № 3 (8). - С. 35-38.*
8. ***Tagaeva S.B.*** *Implementation of algorithm to detect patterns in irgöö-type processes // Herald of Institute Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic. 2022. № 1.- С. 142-147.*
9. ***Tagaeva S.B***. *Improved algorithm to detect patterns in irgöö-type processes // Herald of Institute Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic. 2022. № 2.- С. 92-96.*
10. ***Kenenbaeva G.M., Tagaeva S.B.*** *On constants related to effect of "numerosity"// Herald of Institute Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic. 2021. № 1.- С. 10-16.*

Рецензент: Панков Павел Сергеевич, член-корреспондент НАН КР, д.ф.-м.н., профессор, заведующий лабораторией «Вычислительная математика», Институт математики НАН КР, pps5050@mail.ru