DOI:10.33942/sit1415 УДК 517. 68

МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРИБЛИЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Сабиров Я.А.[1], Пасечников А.И.[2], Жакшылык кызы З.[3], Таалайбек уулу Б.[4], Бакешов Б.Т.[5], Руслан уулу С.[6]

(1) Международный университет инновационных технологий, доцент, E-mail: sabirovj67@mail.ru
(2-6) Международный университет инновационных технологий, магистранты

Аннотация: В работе исследовано нелинейное операторное уравнение первого рода в Гильбертовом пространстве. Для построения приближенного решения применен метод Ньютона. Доказана сходимость приближенного решения к точному решению исходного уравнения при $\delta \to 0$. Построено приближенное решение в δ окрестности точной правой части.

Ключевые слова: *метод Ньютона, линейный оператор, анализ, теория вероятностей, оптимизация, моделирование, статистический анализ.*

НЬЮТОНДУН СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ТУУРА ПРОБЛЕМАЛАРДЫ ЧЕЧҮҮ МЕНЕН БОЛГОН ОПЕРАТОР МЕНЕН МАСЕЛЕЛЕРИ

Сабиров Я.А.[1], Пасечников А.И.[2], Жакшылык кызы З.[3], Таалайбек уулу Б.[4], Бакешов Б.Т.[5], Руслан уулу С.[6]

(1) [1]Эл аралык инновациялык технологиялар университети, доцент, E-mail: sabirovj67@mail.ru
(2-6) [1]Эл аралык инновациялык технологиялар университети, магистранттар

Аннотация: *Документ Гильберт мейкиндигинде биринчи түрдөгү сызыктуу эмес оператор теңдемесин изилдейт. Болжолдуу чечимди куруу үчүн Ньютондун ыкмасы колдонулган. Болжолдуу чечимдин баштапкы теңдеменин так чечимине жакындашуусу үчүн далилденет. Болжолдуу чечим так оң жагына жакын жерде курулган.*

Негизги сөздөр: *Ньютон ыкмасы, сызыктуу оператор, анализ, ыктымалдуулук теориясы, оптималдаштыруу, моделдөө, статистикалык анализ.*

NEWTON'S METHOD FOR SOLVING NONLINEAR ILL-POSITIONED PROBLEMS WITH AN APPROXIMATE OPERATOR

Sabirov Ya.A.[1], Pasechnikov A.I.[2], Zhakshylyk kyzy Z.[3], Taalaibek uulu B.[4], Bakeshov B.T.[5], Ruslan uulu S.[6]

(1) International University of Innovative Technologies, Associate Professor, E-mail: sabirovj67@mail.ru
(2) International University of Innovative Technologies, Master's students

Abstract: *The paper studies a nonlinear operator equation of the first kind in a Hilbert space. To construct an approximate solution, the Newton method is used. The convergence of the approximate solution to the exact solution of the original equation is proved for . An approximate solution is constructed in the neighborhood of the exact right-hand side.*

Keywords: *Newton's method, linear operator, analysis, probability theory, optimization, modeling, statistical analysis.*

Названный метод для решения корректных задач применялся многими авторами [1] и [2]. В данной статье этот метод применяется для решения некорректных задач. Линейные некорректные задачи исследовались в работе [3]. Нелинейные некорректные задачи методом Лаврентьева исследованы в работах [4, 5].

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$Kz = u\,, \tag{1}$$

где К – нелинейный оператор, отображающий Гильбертовое пространство Z в Гильбертовое пространство Z, z – искомый элемент, u – заданный элемент.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$\alpha z + Kz = u\,, \tag{2}$$

где α>0 положительный регуляризирующий параметр.

Допустим, что при u = u_0 уравнение (1) имеет единственное решение z_0. Нелинейный оператор К определен для любого z удовлетворяющего неравенству:

$$\left\| z - z_0 \right\| \le r \tag{3}$$

где r – достаточно малое число и определяется ниже.

Далее предположим, что оператор Kz дифференцируема по Фреше в шаре (3) [1, 2]. Пусть производная оператора К в точке z_0 является линейным оператором, и этот линейный оператор является положительным, обозначим этот оператор через А. В этих условиях оператор $(\alpha E + A)$ имеет обратный оператор для любого α>0 [3].

В этом случае уравнение (2) эквивалентно следующему операторному уравнению

$$z = z - (\alpha E + A)^{-1}(\alpha z + Kz - u) \tag{4}$$

Введем оператор

$$B_\alpha(z;u) = z - (\alpha E + A)^{-1}(\alpha z + Kz - u) \tag{5}$$

Вычислим производную этого оператора

$$B'_\alpha(z;u) = E - (\alpha E + A)^{-1}(\alpha E + A(z)).$$

Отсюда

$$B'_\alpha(z;u) = (\alpha E + A)^{-1}(\alpha E + A - \alpha E - A(z)) = (\alpha E + A)^{-1}(A(z_0) - A(z)) \tag{6}$$

Оператора $(\alpha E + A)^{-1}$ ограничена по норме и удовлетворяет неравенству [1].

$$\left\| (\alpha E + A)^{-1} \right\| \le \frac{1}{\alpha} \tag{7}$$

Допустим, что производная оператора К является непрерывным

$$\|A(z_0)-A(z)\| \le \frac{N\|z-z_0\|}{\alpha}, \qquad \|z-z_0\| \le r \tag{8}$$

Используя неравенства (7), (8) из (6), получаем

$$\|B'_\alpha(z;u)\| \le \frac{N\|z-z_0\|}{\alpha}, \tag{9}$$

Таким образом, оператор $B_\alpha(z;u)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\frac{N\|z-z_0\|}{\alpha}$, т.е. удовлетворяет неравенству

$$\|B_\alpha(z_2;u)-B_\alpha(z_1;u)\| \le \frac{rN}{\alpha}\|z_2-z_1\|. \tag{10}$$

Например $\alpha=\sqrt{\gamma(r)}$.

Покажем, что оператор $B_\alpha(z;u)$ шар $\|z-z_0\| \le tr$ отображает в себя. Рассмотрим разность:

$$\begin{aligned}\|B_\alpha(z;u)-z_0\| &= \|(B_\alpha(z;u)-B_\alpha(z_0;u))+(B_\alpha(z_0;u)-z_0)\| \le \\ &\le \|B_\alpha(z;u)-B_\alpha(z_0;u)\|+\|B_\alpha(z_0;u)-z_0\|\end{aligned} \tag{11}$$

В правой части неравенства (11) первое слагаемое в силу (10) удовлетворяет неравенству

$$\|B_\alpha(z;u)-B_\alpha(z_0;u)\| \le \frac{N}{\alpha}\|z-z_0\|^2. \tag{12}$$

Второе слагаемое оценивается в следующем виде:

$$\begin{aligned}\|B_\alpha(z_0;u)-z_0\| &= \|z_0-(\alpha E+A)^{-1}(\alpha z_0+Kz_0-u)-z_0\| = \\ &= \|(\alpha E+A)^{-1}(\alpha z_0+Kz_0-u)\| \le \|(\alpha E+A)^{-1}\alpha z_0\|+\|(\alpha E+A)^{-1}(u_0-u)\|\end{aligned} \tag{13}$$

Допустим, что точное решение представим в виде

$$z_0=A^\sigma \upsilon_0, \qquad \upsilon_0 \in L_2[0;1].$$

Тогда первое слагаемое в неравенстве (13) оценивается в следующем виде [4]

$$\|(\alpha E+A)^{-1}\alpha A^\sigma \upsilon_0\| \le \alpha^\sigma\|\upsilon_0\| \tag{14}$$

Оценим второе слагаемое справа в (13).

В силу неравенства (7) и $\|u-u_0\| \le \delta$, получаем

$$\|(\alpha E+A)^{-1}(u-u_0)\| \le \frac{\|u-u_0\|}{\alpha} \le \frac{\delta}{\alpha} \tag{15}$$

Используя неравенства (14), (15) из неравенства (13), получаем

$$\|B_\alpha(z_0;u)-z_0\| \le \alpha^\sigma\|\upsilon_0\|+\frac{\delta}{\alpha} \tag{16}$$

Используя неравенства (16), (12) из равенства (11) получаем

$$\left\|B_\alpha(z;u)-z_0\right\| \le \frac{N\left\|z-z_0\right\|^2}{\alpha}+\alpha^\sigma\left\|\upsilon_0\right\|+\frac{\delta}{\alpha} \tag{17}$$

Используя неравенства (3) из (17) получаем

$$\left\|B_\alpha(z;u)-z_0\right\| \le \frac{N\left\|z-z_0\right\|^2}{\alpha}+\alpha^\sigma\left\|\upsilon_0\right\|+\frac{\delta}{\alpha}=\left\|z-z_0\right\| \tag{18}$$

Введем обозначение

$$\eta(\alpha)+\alpha^\sigma\left\|\upsilon_0\right\|+\frac{\delta}{\alpha} \tag{*}$$

Покажем, что оператор $B_\alpha(z;u)$ при некотором t шар

$\left\|z-z_0\right\| \le t\eta$ отображает в себя.

Из (18) для определения t получаем уравнение

$\frac{N}{\alpha}\eta t^2-t+1=0$. Обозначим через $h=\frac{N}{\alpha}\eta$.

Тогда решение уравнения (19) представимо в виде

$$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4h}}{2h}.$$

Пусть постоянное число h удовлетворяет неравенству

$$h<\frac{1}{4}. \tag{20}$$

Тогда минимальный корень

$$t_0=\frac{1-\sqrt{1-4h}}{2h} \tag{21}$$

При этих значениях t оператор $B_\alpha(z;u)$ шар $\left\|z-z_0\right\| \le t_0\eta$ отображает в себя.

Функция $\eta(\alpha)$ в точке $\alpha(\delta)=\delta^{\frac{1}{1+\sigma}}\left(\frac{1}{\sigma\left\|v_0\right\|}\right)^{\frac{1}{1+\sigma}}$,

Достигает минимуму и этот минимум равен

$$\eta(\delta)=\delta^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}\left\|v_0\right\|+\delta^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}\left(\sigma\left\|v_0\right\|\right)^{-\frac{1}{1+\sigma}}=\delta^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}C_0,$$

где $C_0=\left\|v_0\right\|+\left(\sigma\left\|v_0\right\|\right)^{-\frac{1}{1+\sigma}}$.

Подставляя значение $\alpha(\delta)$ и $\eta(\delta)$, выражению

$$h=\frac{\eta}{\alpha}N=\frac{\delta^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}C_0N}{\delta^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}C_1}=C_1{}^*\delta^{\frac{\sigma-1}{1+\sigma}}.$$

Допустим, что параметр $\sigma>1$.

Таким образом

$$C_1{}^*\delta^{\frac{\sigma-1}{1+\sigma}}<\frac{1}{4},\quad \text{т.е. } \delta<\left(\frac{1}{4C_1{}^*}\right)^{\frac{\sigma-1}{1+\sigma}}=\delta_0.$$

Из неравенства (10) полагая $r=\eta t_0$, получаем

$$\begin{aligned}&\|B_\alpha(z_2;u)-B_\alpha(z_1;u)\|\le\frac{N}{\alpha}\|z_2-z_1\|=\\&=h\cdot\frac{1-\sqrt{1-4h}}{2h}\|z_2-z_1\|\le\frac{1}{2}\|z_2-z_1\|\end{aligned}. \qquad (**)$$

Таким образом, оператор $B_\alpha(z;u)$ удовлетворяет условию Липщица с постоянной $\frac{1}{2}$, т.е. оператор $B_\alpha(z;u)$ является сжимающим оператором.

Доказана следующая

Т е о р е м а 1. Пуст: 1) операторное уравнение (1) при $u=u_0$ имеет точное решение z_0; 2) Нелинейный оператор К в точке z_0 имеет производную; 3) производная оператора К удовлетворяет условию Липщица с постоянной N; 4) точное решение z_0 истокообразно представимо в виде $z_0=A^\sigma v_0,\quad \sigma>1$; 5) параметр α удовлетворяет условию $\alpha(\delta)=\delta^{\frac{1}{1+\sigma}}$; 6) η удовлетворяет условию $\eta(\delta)=\delta^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}C_0$.

Тогда уравнение (2) имеет единственное решение z_α.

Покажем, что это решение при $u=u_0$ сходится к решению уравнения (1) при $\alpha\to 0$.

Действительно имеет места тождества

$$z_\alpha^0\equiv z_\alpha^0-(\alpha E+A)^{-1}(\alpha z_\alpha^0+Kz_\alpha^0-u_0)\equiv B_\alpha(z_\alpha^0;u_0) \qquad (20)$$

Далее имеет места тождества

$$z_0\equiv z_0-(\alpha E+A)^{-1}(\alpha z_0+Kz_0-u_0)+(\alpha E+A)^{-1}\alpha z_0\equiv B_\alpha(z_0;u_0)+(\alpha E+A)^{-1}\alpha z_0$$

(21)

Вычитая из тождества (20), (21), получаем

$$\|z_\alpha^0-z_0\|\le N\frac{1}{2}\|z_\alpha^0-z_0\|+\alpha^\sigma\|\upsilon_0\|$$

Отсюда

$$\|z_\alpha^0-z_0\|\le\frac{\alpha^\sigma\|\upsilon_0\|}{1-q_0} \qquad (22)$$

Здесь мы учитывали неравенства (**).

Доказана

Т е о р е м а 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1.

Тогда при $u = u_0$ уравнение (4) имеет решение z_α^0 и это решение при $\alpha \to 0$ стремиться к точному решению уравнения (1). Скорость сходимости удовлетворяет неравенству:

$$\left\| z_\alpha^0 - z_0 \right\| \le 2\alpha^\sigma \left\| \upsilon_0 \right\|$$

Далее исследуется уравнение (1), когда приближенно задается оператор К

$$K_n z = u \qquad (1`)$$

Тогда наряду с уравнением (1`) рассмотрим уравнение

$$\alpha z + K_n z = u \qquad (2`)$$

Доказано, что решение уравнения (2`) является приближенным решением уравнения (1).

Список использованных источников

1. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М: Наука, 1965.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. –М: Наука, 1977г.
3. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
4. Саадабаев А.С. Приближенные методы решения нелинейных интегральных и операторных уравнений 1-го рода. – Бишкек, 1997.
5. Саадабаев А.С. Регуляризованный метод Ньютона для решения нелинейного интегрального уравнения первого рода. Вестник КГНУ. – Бишкек 2001. Сер.3. Выпуск 6. С.59-63.
6. Kenenbaeva G.M., Zhamalova V.Zh. Problems of using artificial intelligence in mathematical research. /Herald of institute mathematics of the national academy of sciences of the kyrgyz republic. №1/2024г. С.: 184-191
7. Аскар кызы Л., Жамалова В.Ж., Солтоева А., Чиныбекова А.Н. Мультимедийные дидактические материалы по олимпиадным задачам/ наука и инновационные технологии/2(31) /2024г, С.: 66-75
8. Halmos, P. R. (1974). Finite-Dimensional Vector Spaces. Springer.
9. Spivak, M. (1967). Calculus on Manifolds. Addison-Wesley.
10. Feller, W. (1968). An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Wiley.
11. Munkres, J. (2000). Topology. Prentice Hall.
12. Hogg, R. V., & Tanis, E. A. (2014). Probability and Statistical Inference. Pearson.
13. Lang, S. (1997). Algebra. Springer.
14. Stewart, J. (2015). Calculus: Early Transcendentals. Cengage Learning.
15. Bishop, E. (1967). Foundations of Constructive Analysis. McGraw-Hill.