DOI:10.33942/sit1190 **УДК 517.68**

ОЦЕНКА МЕЖДУ ПРИБЛИЖЕННЫМ И ТОЧНЫМ РЕШЕНИЯМИ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

[1]Саадабаев А., **[2]Абдылдаева А.Р.**, **[3]Сабиров Я.А.**

[1]Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика

[2] Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, Бишкек, Кыргызская Республика

[3]Международный университет инновационных технологий, Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация. *В работе показана зависимость параметра регуляризации от погрешности ядра $\beta(n)$, т.е. $\alpha=\alpha(\beta(n))$, причем $\alpha(\beta(n))\to 0$ при $n\to\infty$. Построенное приближенное решение $z(\alpha(\beta(n)))$ сходится к точному решению $z_0(t)$ при $n\to\infty$. Доказана сходимость приближенного решения к точному решению, когда правая часть задана приближенно. Получена скорость сходимости приближенного решения.*

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^1 K(t,s)z(s)ds = u(t)+\int_0^1 K_1(t,s)M(s,z(s))ds, \qquad (1)$$

где $K(t,s)$- симметричная, положительно определенная, непрерывная в квадрате $0\le t,s\le 1$ функция, $M(s,z)$- функция непрерывная по s и удовлетворяет условию Липшица в области $0\le s\le 1$, $-\infty<z<\infty$, $K_1(t,s)$- некоторая непрерывная функция, зависящая от $K(t,s)$.

Покажем, что решение уравнения

$$\alpha z+\int_0^1 K(t,s)z(s)ds = u(t)+\int_0^1 K_1(t,s)M(s,z(s))ds-$$

$$-\int_0^1 [K_n(t,s)-K(t,s)]z(s)ds+\int_0^1 (K_{1n}(t,s)-K_1(t,s))M(s,z(s))ds$$

при $u(t)=u_0(t)$ сходится к точному решению уравнения (1) при $\alpha\to 0, n\to\infty$.

Функция $g_\alpha^n(t)$, как решение уравнения

$$g(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k\varphi_k(t)}{1+\alpha\mu_k}+\frac{1}{\alpha}u(t)+$$

$$+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha\mu_k}\int_0^1\left(\int_0^1 (K_n(s,v)-K(s,v))(D_\alpha g(v)dv)\right)\varphi_k(s)ds\cdot\varphi_k(t)-$$

$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^1 (K_h(t,s)-K(t,s))\cdot D_\alpha g(s)ds-$$

$$-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\mu_k\alpha}\int_0^1\varphi_k(s)\int_0^1\left(K_{1n}(s,v)-K_1(s,v)\right)M\left(v,D_\alpha g(v)\right)dvds\cdot\varphi_k(t)+$$
$$+\frac{1}{\alpha}\int_0^1\left(K_{1n}(t,s)-K_1(t,s)\right)M(s,D_\alpha g(s))ds.$$
представима в виде
$$g_\alpha^n(t)=G_\alpha^n g_0(t).$$
Подставляя это в
$$z_\alpha^n(t)=D_\alpha g_\alpha^{\beta(n)}\left(t\right)$$
получаем
$$z_\alpha^n(t)=D_\alpha G_\alpha^n g_0(t). \qquad (2)$$
Оценим разность $z_\alpha^n(t)-z_\alpha^0(t)$.
Функция $z_\alpha(t)$ как решение уравнения
$$g_0(t)+\left(g_1(t)-g_0(t)\right)+\left(g_2(t)-g_1(t)\right)+...+\left(g_j(t)-g_{j-1}(t)\right)+... \qquad (3)$$
представима в виде
$$z_\alpha(t)=D_\alpha g_0(t). \qquad (4)$$
Тогда из (2) и (4) имеем
$$\left|z_\alpha^n(t)-z_\alpha(t)\right|=\left|D_\alpha G_\alpha^n g_0(t)-D_\alpha g_0(t)\right|\le\frac{1}{1-q}\left\|G_\alpha^n g_0(t)-g_0(t)\right\|_{C(0,1)}. \qquad (5)$$
В работе [1] было показано, что числовой ряд
$$\left\|g_0(t)\right\|_{C(0,1)}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\beta(n)}{\alpha\sqrt{\alpha}}K_2\right)^{j-1}\left\|g_1-g_0\right\|_{C(0,1)}$$
сходится и его сумма равна
$$\left\|g_0(t)\right\|_{C(0,1)}+\frac{1}{1-q}\left\|g_1-g_0\right\|_{C(0,1)}.$$
Используя это и (3), из (5) получаем
$$\left|z_\alpha^n(t)-z_\alpha(t)\right|\le\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q_1}\left\|g_1(t)-g_0(t)\right\|_{C(0,1)}.$$
Далее, используя оценку $\left|g_j(t)-g_{j-1}(t)\right|\le\left(\frac{\beta(n)}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)^{j-1}K_2^{j-1}\left\|g_1-g_0\right\|_{C(0,1)}$, из предыдущего неравенства получаем
$$\left|z_\alpha^n(t)-z_\alpha(t)\right|\le\frac{1}{(1-q)(1-q_1)}\left(\frac{\beta(n)}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)\left(K_2\left\|g_0(v)\right\|_{C(0,1)}\right)+K_2K_0M+C_2M_0\left(\frac{K_0}{2}+1\right). \qquad (6)$$
Покажем, что $\left\|g_0(v)\right\|$ является ограниченной при $\alpha\to 0$. Действительно, $z_0(t)$ удовлетворяет тождеству
$$\int_0^1 K(t,s)z_0(s)ds=u_0(t)+\int_0^1 K_1(t,s)M\left(s,z_0(s)\right)ds.$$
Отсюда
$$\frac{z_{ok}}{\mu_k}=u_{ok}+\frac{1}{\mu_k^{3/2}}\int_0^1 M\left(s,z_0(s)\right)\varphi_k(s)ds.$$
Подставляя это в
$$g_0(t)=-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k\varphi_k(t)}{1+\alpha\mu_k}+\frac{1}{\alpha}u(t) \qquad (7)$$

имеем

$$g_0(t)=-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k\varphi_k(t)}{1+\alpha\mu_k}+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}u_k\varphi_k(t)=\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}u_k\left(1-\frac{1}{1+\alpha\mu_k}\right)\varphi_k(t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k u_k}{1+\alpha\mu_k}\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k}{1+\alpha\mu_k}\left(\frac{z_{ok}}{\mu_k}-\frac{1}{\mu_k^{3/2}}\int_0^1 M\left(s,z_0(s)\right)\varphi_k(s)ds)\varphi_k(t)=\right.$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_{ok}}{1+\alpha\mu_k}\varphi_k(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha\mu_k}\int_0^1 M\left(s,z_0(s)\right)\varphi_k(s)ds\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\mu_k}}.$$

Отсюда имеем

$$|g_0(t)|\le\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\vartheta_{ok}}{\sqrt{\mu_k}\,(1+\alpha\mu_k)}\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\mu_k}}\right|+\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha\mu_k}\int_0^1 M\left(s,z_0(s)\right)\varphi_k(s)ds\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\mu_k}}\right|\le$$

$$\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\vartheta_{ok}^2}{\mu_k\left(1+\alpha\mu_k^o\right)^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^2(t)}{\mu_k}\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\alpha\mu\right)^2}\left(\int_0^1 M\left(s,z_0(s)\right)\varphi_k(s)ds\right)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^2(t)}{\mu_k}\right)^{1/2}\le \qquad (8)$$

$$\le\frac{K_0}{\mu_k}\|\vartheta_0\|+K_0\max_{0\le s\le 1}\left|M\left(s,z_0(s)\right)\right|.$$

Оценим $M\left(s,z_0(s)\right)$:

$$\left|M\left(s,z_0(s)\right)\right|\le\left|M\left(s,z_0(s)\right)-M(s,0)\right|+\left|M(s,0)\right|\le N\left|z_0(s)\right|+M_0,$$

где $M_0=\max\limits_{0\le s\le 1}\left|M(s,0)\right|$.

Подставляя это в неравенство (8), имеем

$$\left|g_0(t)\right|\le\frac{K_0}{\mu_k}\|\vartheta_0\|_{l_2(0,1)}+K_0N\|z_0(s)\|_{C(0,1)}+K_0M_0\equiv K_3.$$

Тогда из неравенства (6) получаем

$$\left|z_\alpha^n(t)-z_\alpha(t)\right|\le\frac{1}{(1-q)(1-q_1)}\left(\frac{\beta(n)}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)\cdot\left(K_2K_3+K_2K_0M_0+C_2M_0\left(\frac{K_0}{2}+1\right)\right). \qquad (9)$$

Оценим разность $z_\alpha^n(t)-z_0(t)$. Используя неравенство треугольника $[4]$, неравенство (9), получаем

$$\left\|z_\alpha^n(t)-z_0(t)\right\|_{C(0,1)}\le\left\|z_\alpha^n(t)-z_\alpha(t)\right\|_{C(0,1)}+\left\|z_\alpha(t)-z_0(t)\right\|_{C(0,1)}\le K_4\left(\frac{\beta(n)}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)+K_5\sqrt{\alpha}, \qquad (10)$$

где

$$K_4=\frac{1}{(1-q)(1-q_1)}\left(K_2K_3+K_2K_0M_0+C_2M_0\left(\frac{K_0}{2}+1\right)\right),\quad K_5=\frac{K_0\|\vartheta_0\|}{1-q}.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\alpha)=K_5\alpha^{1/2}+K_4\beta(n)\alpha^{-3/2}.$$

Найдем минимум этой функции. Вычислим первую производную и приравняем её к нулю

$$\varphi'(\alpha)=K_5\frac{1}{2}\alpha^{-1/2}-\frac{3}{2}K_4\beta(n)\alpha^{-5/2}=0.$$

Отсюда

$$\alpha\left(\beta(n)\right)=\left(\frac{3K_4}{K_5}\right)^{1/2}\beta(n)^{1/2}.$$

(11)

Подставляя это в правую часть (10), получаем

$$\left\|z_\alpha^n(t)-z_0(t)\right\|_{C(0,1)}\le K_4\beta(n)^{1-\frac{3}{4}}\left(\frac{3K_4}{K_5}\right)^{-3/4}+K_5\left(\frac{3K_4}{K_5}\right)^{1/4}\beta(n)^{1/4}=$$

$$=\beta(n)^{1/4}\left(\frac{3K_4}{K_5}\right)^{1/4}\left(K_5+K_4\frac{K_5}{3K_4}\right)=\beta(n)^{1/4}\left(\frac{3K_4}{K_5}\right)^{1/4}\frac{4K_5}{3}. \tag{12}$$

Если параметр α меняется по закону (11), то условие

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(n)}{\left(\alpha\left(\beta(n)\right)\right)^{3/2}}=0$$

выполняется.

Далее, подставляя (11) в левую часть неравенства

$$q_1\equiv\frac{\beta(n)K_2}{\left(\alpha\left(\beta(n)\right)\right)^{3/2}}<1,\quad \beta(n)<\beta_0(n) \tag{13}$$

получаем

$$K_2\beta(n)^{1-\frac{3}{4}}\left(\frac{3K_4}{K_5}\right)^{-1/2}=K_2\beta(n)^{1/4}\left(\frac{3K_4}{K_5}\right)^{-1/2}<1.$$

Отсюда

$$\beta(n)<\left(\frac{3K_4}{K_5}\right)^{1/8}K_2^{-1/4}\equiv\beta_0^0(n). \tag{14}$$

Доказана

Теорема 1. Пусть: 1) ядро $K(t,s)$ является симметричным, положительно определенным и непрерывным в квадрате $0\le t,s\le 1$; 2) непрерывная функция $K_1(t,s)$ представима в виде $K_1(t,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)\varphi_k(s)}{\mu_k^{3/2}}$, где $\{\varphi_k(t)\}$ - ортонормированные собственные функции ядра $K(t,s)$, соответствующие характеристическим значениям $\{\mu_k\}$; 3) функция $M(v,z)$ удовлетворяет условию Липшица по z в области $0\le v\le 1$, $-\infty<z<\infty$, т.е. $\left|M(v,z_2)-M(v,z_1)\right|\le N\left|z_2-z_1\right|$; 4) постоянная $q\equiv K_0N<1$, где $K_0=\max\limits_{0\le t,s\le 1}\left|K(t,s)\right|$, 5) $u(t)$- заданная непрерывная функция; 6) функции $K_n(t,s)$ и $K_{1n}(t,s)$ удовлетворяют неравенству $\left\|K(t,s)-K_n(t,s)\right\|_{C((0,1)\times(0,1))}\le C_1\beta(n)$, $\left\|K_1(t,s)-K_{1n}(t,s)\right\|\le C_2\beta(n)$; 6) параметр α удовлетворяет условию (11), 7) параметр $\beta(n)$ удовлетворяет неравенству (14).

Тогда решение $z_{\alpha,0}^n(t)$ уравнения

$$z(t)=-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k\varphi_k(t)}{1+\alpha\mu_k}+\frac{1}{\alpha}u(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\mu_k\alpha}\int_0^1 M\left(v,z(v)\right)\varphi_k(v)dv\cdot\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\mu_k}}+$$

$$+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha\mu_k}\int_0^1\left(\int_0^1\left(K_n(s,v)-K(s,v)\right)z(v)dv\cdot\varphi_k(s)\right)ds\cdot\varphi_k(t)-$$

$$-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\mu_k\alpha}\int_0^1\varphi_k(s)\int_0^1\left(K_{1n}(s,v)-K_1(s,v)\right)M\left(v,z(v)\right)dvds-$$
$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^1\left(K_n(t,s)-K(t,s)\right)z(s)ds+\frac{1}{\alpha}\int_0^1\left(K_{1n}(t,s)-K_1(t,s))M\left(s,z(s)\right)ds. \tag{15}$$

при $u=u_0(t)$ и при $n\to\infty$ сходится к точному решению уравнения (1).

Скорость сходимости удовлетворяет неравенству (12).

Рассмотрим случай, когда вместо $u_0(t)$ задано приближенное значение $u_\delta(t)$.

Допустим, что вместо функции $u_0(t)$ задана функция $u_\delta(t)$, удовлетворяющая неравенству

$$\left\|u_\delta(t)-u_0(t)\right\|_{C(0,1)}\le\delta. \tag{16}$$

Через $z^n_{\alpha,\delta}(t)$ обозначим решение уравнения (15) при $u=u_\delta(t)$. В силу формулы (2), это решение представимо в виде

$$z^n_{\alpha,\delta}(t)=D_\alpha G^n_\alpha g_\delta(t), \tag{17}$$

где

$$g_\delta(t)=-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_{\delta k}\varphi_k(t)}{1+\alpha\mu_k}+\frac{1}{\alpha}u_\delta(t). \tag{18}$$

Оценим разность $z^n_{\alpha,\delta}(t)-z^n_\delta(t)$. Из (2) и (17) получаем

$$\left|z^n_{\alpha,\delta}(t)-z^n_\alpha(t)\right|=\left|D_\alpha\left(G^n_\alpha g_\delta\right)-D_\alpha\left(G^n_\alpha h_0\right)\right|\le\frac{1}{1-q}\left|G^n_\alpha g_\delta-G^n_\alpha g_0\right|. \tag{19}$$

Покажем, что оператор G^n_α удовлетворяет условию Липшица $[3]$.

Действительно, получаем тождество

$$G^n_\alpha g_0=g_0+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha\mu_k}\int_0^1\left(\int_0^1\left(K_n(s,v)-K(s,v)\right)D_\alpha G^n_\alpha g_0(v)dv\right)\varphi_k(s)ds\cdot\varphi_k(t)-$$
$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^1\left(K_n(t,s)-K(t,s)\right)D_\alpha G^n_\alpha g_0(s)ds-$$
$$-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\mu_k\alpha}\int_0^1\left(K_{1n}(s,v)-K(s,v)\right)M(v,D_\alpha G^n_\alpha g_0)dvds\varphi_k(t)+ \tag{20}$$
$$+\frac{1}{\alpha}\int_0^1\left(K_{1n}(t,s)-K_1(t,s)\right)M(s,D_\alpha G^n_\alpha g_0)ds.$$

Аналогично

$$G^n_\alpha g_\delta=g_\delta+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha\mu_k}\int_0^1\left(\int_0^1\left(K_n(s,v)-K(s,v)\right)D_\alpha G^n_\alpha g_\delta(v)dv\right)\varphi_k(s)ds\cdot\varphi_k(t)-$$
$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^1\left(K_h(t,s)-K(t,s)\right)D_\alpha G^n_\alpha g_\delta(s)ds-$$
$$-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha\mu_k}\int_0^1\varphi_k(s)\int_0^1\left(K_{1n}(s,v)-K_1(s,v)\right)M\left(v,D_\alpha G^n_\alpha h_\delta\right)dvds\cdot\varphi_k(t)+$$
$$+\frac{1}{\alpha}\int_0^1\left(K_{1h}(t,s)-K_1(t,s)\right)M\left(s,D_\alpha G^n_\alpha g_\delta\right)ds. \tag{21}$$

Вычитая из тождества (20) тождество (21), получаем

$$\left|G_\alpha^n g_0 - G_\alpha^n g_\delta\right| \le \left|g_0 - g_\delta\right| + \frac{\beta(n)}{2\alpha\sqrt{\alpha}}\frac{K_0}{1-q}\left\|G_\alpha^n g_0 - G_\alpha^n g_\delta\right\|_{C(0,1)} + \frac{\beta(n)}{\alpha}\frac{1}{1-q}\left\|G_\alpha^n g_0 - G_\alpha^n g_0\right\|_{C(0,1)} +$$

$$+\frac{\beta(n)}{2\alpha\sqrt{\alpha}}N\frac{K_0}{1-q}\left\|G_\alpha^n g_0 - G_\alpha^n g_\delta\right\|_{C(0,1)} + \frac{\beta(n)}{\alpha}N\frac{1}{1-q}\left\|G_\alpha^n g_0 - G_\alpha^n g_\delta\right\|_{C(0,1)} +$$

$$+\frac{\beta(n)}{\alpha}N\frac{1}{1-q}\left\|G_\alpha^n g_0 - G_\alpha^n g_0\right\|_{C(0,1)} \le$$

$$\le \left\|g_0 - g_\delta\right\|_{C(0,1)} + \left(\frac{\beta(n)}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)\left(\frac{C_1}{1-q}\left(\frac{1}{2}K_0+1\right) + \frac{C_2 N}{1-q}\left(\frac{K_0}{2}+1\right)\right)\left\|G_\alpha^n g_\delta - G_\alpha^n g_0\right\|_{C(0,1)}.$$

Отсюда в силу условия (13) имеем оценку $[2]$

$$\left\|G_\alpha^n g_\delta - G_\alpha^n g_0\right\|_{C(0,1)} \le \frac{1}{1-q_1}\left\|g_\delta(t) - g_0(t)\right\|_{C(0,1)},$$

где

$$q_1 = \beta(n)\left(\alpha\left(\beta(n)\right)\right)^{-3/2} K_2, \quad K_2 = \left(\frac{K_0}{2}+1\right)\left(C_1 + C_2 N\right).$$

Используя это, из неравенства (19) получаем

$$\left|z_{\alpha,\delta}^n(t) - z_\alpha^0(t)\right| \le \frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q_1}\left\|g_\delta(t) - g_0(t)\right\|_{C(0,1)}. \tag{22}$$

Оценим $g_\delta(t) - g_0(t)$.

Из (18) вычитая (7), имеем

$$\left|g_\delta(t) - g_0(t)\right| = \left|\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(u_{\delta k} - u_{ok}\right)\sqrt{\mu_k}}{1+\alpha\mu_k}\cdot\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\mu_k}}\right| + \frac{1}{\alpha}\left|u_\delta(t) - u_0(t)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{\mu_k}}{1+\alpha\mu_k}\right)^2\left(u_{\delta k} - u_{0k}\right)^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^2(t)}{\mu_k}\right)^{1/2} + \frac{\delta}{\alpha} \le \frac{1}{2\alpha\sqrt{\alpha}}\delta K_0 + \frac{\delta}{\alpha\sqrt{\alpha}} = \frac{\delta}{\alpha\sqrt{\alpha}}\left(1+\frac{K_0}{2}\right).$$

Здесь мы использовали неравенство (16) и неравенство Бесселя.

Тогда из неравенства (22) получаем

$$\left\|z_{\alpha,\delta}^n(t) - z_\alpha^n(t)\right\|_{C(0,1)} \le \frac{\delta}{\alpha\sqrt{\alpha}}\left(1+\frac{K_0}{2}\right)\frac{1}{(1-q)(1-q_1)}. \tag{23}$$

Оценим разность $z_{\alpha,\delta}^n(t) - z_0(t)$.

Используя неравенство треугольника, неравенство (10) и неравенство (23), получаем

$$\begin{aligned} \left\|z_{\alpha,\delta}^n(t) - z_0(t)\right\|_{C(0,1)} &\le \left\|z_{\alpha,\delta}^n(t) - z_\alpha^n(t)\right\|_{C(0,1)} + \left\|z_\alpha^n(t) - z_0(t)\right\|_{C(0,1)} \le \\ &\le \frac{\delta}{\alpha\sqrt{\alpha}}K_6 + K_4\frac{\beta(n)}{\alpha\sqrt{\alpha}} + K_5\sqrt{\alpha} = \frac{\left(\delta K_6 + \beta(n)K_4\right)}{\alpha\sqrt{\alpha}} + K_5\sqrt{\alpha}, \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$K_6 = \left(1+\frac{K_0}{2}\right)\frac{1}{(1-q)(1-q_1)}.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\alpha) = K_5\alpha^{1/2} + \alpha^{-3/2}\left(\delta K_6 + \beta(n)K_4\right).$$

Вычислим первую производную и приравняем её к нулю

$$\varphi'(\alpha) = \frac{1}{2}K_5\alpha^{-1/2} - \frac{3}{2}\alpha^{-5/2}\left(\delta K_6 + \beta(n)K_4\right) = 0.$$

Отсюда

$$\alpha\left(\delta,\beta(n)\right)=\left(\frac{3}{K_5}\right)^{1/2}\left(\delta K_6+hK_4\right)^{1/2}. \tag{25}$$

Подставляя это в правую часть (24), получаем

$$\begin{aligned}\left\|z_{\alpha,\delta}^n(t)-z_0(t)\right\|_{C(0,1)} &\le \left(\delta K_6+\beta(n)K_4\right)^{1-\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{K_5}\right)^{-\frac{3}{4}}+K_5\left(\frac{3}{K_5}\right)^{1/4}\left(\delta K_6+\beta(n)K_4\right)^{1/4}= \\ &=\left(\delta K_6+\beta(n)K_4\right)^{1/4}\cdot\left(\frac{K_5}{3}\right)^{3/4}\left(1+K_5\frac{3}{K_5}\right)=4\left(\delta K_6+\beta(n)K_4\right)^{1/4}\left(\frac{K_5}{3}\right)^{3/4}.\end{aligned} \tag{26}$$

Теорема 2. Пусть: 1) выполняются все условия теоремы 1; 2) функция $u_\delta(t)$ удовлетворяет неравенству (16); 3) параметр α выбран по закону (25).

Тогда решение $z_{\alpha,\delta}^n(t)$ уравнения (15) при $u(t)=u_\delta(t)$ и при $\delta\to 0, n\to\infty$ сходится к точному решению уравнения (1).

Скорость сходимости удовлетворяет неравенству (26).

Список литературы

1. *Саадабаев, А.С. Существование конечномерного решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода [Текст] / А. С. Саадабаев, А. Р. Абдылдаева // Вестн. Кырг. гос. ун-т стр-во и архитектуры им. Н. Исанова. – 2020. – № 3(69). –С.459-466.*
2. *Саадабаев, А.С. Построение конечномерного регуляризирующего оператора для решения операторного уравнения первого рода [Текст] / А. С. Саадабаев, А. Р. Абдылдаева // Проблемы современной науки и образования. – М., 2016. – № 14(56). – С.7-10.*
3. *Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики [Текст] / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния АН СССР, 1962. – 92 с.*
4. *Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач [Текст] / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 285 с.*