DOI:10.33942/sit1368 УДК 510.8

РЕШЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ВВЕДЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ АРГУМЕНТОВ

Билал кызы М.,[1] Ибраимова Ш.А.,[2] Дуйшеева Н.А.[3]

[1, 2, 3] *Ошский технологический университет им. М.М. Адышева*

Аннотация: *В данной статье рассматривается метод решения параболических уравнений на основе введения дополнительных аргументов, направленный на упрощение структуры исходных уравнений и повышение эффективности аналитических и численных подходов. Параболические уравнения, описывающие процессы теплопереноса, диффузии и других явлений, часто требуют применения специальных трансформаций для получения устойчивых и точных решений. Метод введения дополнительных аргументов позволяет преобразовать исходное уравнение в более удобную форму, что способствует улучшению условий аппроксимации и сходимости численных схем. В статье приведены примеры использования данного метода при решении однородных и неоднородных уравнений с начальными и граничными условиями, а также проводится сравнение с традиционными методами, такими как метод разделения переменных и метод конечных разностей. Представленные результаты демонстрируют потенциал рассматриваемого подхода в прикладных задачах математической физики.*

Ключевые слова: *параболические уравнения, метод дополнительных аргументов, численные методы, математическая физика, теплоперенос, преобразование уравнений, устойчивость решений.*

КОШУМЧА АРГУМЕНТТЕРДИ КИРГИЗҮҮ МЕНЕН ПАРАБОЛИКАЛЫК ТЕҢДЕЛЕРДИ ЧЕЧҮҮ

Билал кызы М.,[1] Ибраимова Ш.А.,[2] Дуйшеева Н.А.[3]

[1, 2, 3] *М.М. Адышев атындагы Ош технологиялык университети*

Аннотация: *Бул макалада параболалык теңдемелерди чечүүнүн жаңы ыкмасы — кошумча аргументтерди киргизүү жолу менен жүргүзүлүүчү ыкма каралат. Аталган ыкманын максаты — баштапкы теңдемелердин түзүмүн жөнөкөйлөтүү жана аналитикалык, ошондой эле эсептик ыкмаларды натыйжалуу колдонууга жол ачуу. Жылуулуктун өтүшү, диффузия жана башка процесстерди сүрөттөөчү параболалык теңдемелерди туруктуу жана так чечүү үчүн көбүнчө атайын түрдөгү өзгөртүүлөр талап кылынат. Кошумча аргументтерди киргизүү ыкмасы аркылуу баштапкы теңдеме ыңгайлуу формага келтирилет, бул өз кезегинде эсептик схемалардын жакындашуу шарттарын жана туруктуулугун жакшыртат. Макалада бул ыкма бир тектүү жана тектүү эмес теңдемелерге баштапкы жана чегаралык шарттар менен колдонулган мисалдар келтирилип, бөлчөк өзгөрмөлөр методу жана аяккы айырма ыкмасы сыяктуу салттуу ыкмалар менен салыштыруу жүргүзүлөт. Натыйжалар бул ыкманын колдонмо математикалык физикадагы маселелерди чечүүдө жогорку потенциалы бар экендигин көрсөтөт.*

Негизги сөздөр: *параболалык теңдемелер, кошумча аргументтер методу, эсептик ыкмалар, математикалык физика, жылуулук өткөрүү, теңдемени түрүн өзгөртүү, чечимдин туруктуулугу.*

SOLUTION OF PARABOLIC EQUATIONS BY INTRODUCING ADDITIONAL ARGUMENTS

Bilal kyzy M.,[1] Ibraimova Sh.A.,[2] Duisheeva N.A.[3]

[(1, 2, 3)] *Osh Technological University named after MM. Adyshev*

Abstract: *This article explores a method for solving parabolic equations based on the introduction of additional arguments, aimed at simplifying the structure of the original equations and enhancing the effectiveness of analytical and numerical approaches. Parabolic equations, which describe processes such as heat transfer, diffusion, and other phenomena, often require special transformations to obtain stable and accurate solutions. The method of introducing additional arguments allows the original equation to be transformed into a more convenient form, improving the conditions for approximation and convergence of numerical schemes. The article presents examples of applying this method to both homogeneous and nonhomogeneous equations with initial and boundary conditions and includes comparisons with traditional methods such as the method of separation of variables and the finite difference method. The results demonstrate the potential of this approach in applied problems of mathematical physics.*

Keywords: *parabolic equations, method of additional arguments, numerical methods, mathematical physics, heat transfer, equation transformation, solution stability.*

Введение. Параболические дифференциальные уравнения занимают одно из центральных мест в математическом моделировании процессов, характеризующихся неравномерным распределением температуры, концентрации, давления и других физических величин. Наиболее известным представителем данного класса является уравнение теплопроводности, однако сфера применения параболических уравнений значительно шире и охватывает разнообразные области — от инженерных задач до биофизики и экономики. В связи с этим проблема эффективного и устойчивого решения параболических уравнений сохраняет свою актуальность на протяжении многих десятилетий.

В условиях стремительного развития вычислительных технологий и увеличения сложности моделируемых процессов возникает потребность в таких методах, которые позволяют не только точно, но и экономично решать параболические уравнения с различными начальными и граничными условиями. Особую сложность представляют собой задачи с переменными коэффициентами, неоднородностями и сложной геометрией области. Традиционные методы, такие как метод разделения переменных, метод конечных разностей, конечных элементов и интегральных преобразований, несмотря на широкое применение, зачастую сталкиваются с ограничениями, связанными с вычислительной затратностью, нестабильностью или необходимостью дополнительных упрощений.

Целью настоящей работы является исследование и обоснование метода решения параболических уравнений с использованием введения дополнительных аргументов. Такой подход предполагает расширение пространства переменных, что позволяет преобразовать исходное уравнение в более удобную для анализа форму. В ряде случаев это дает возможность упростить процедуру решения, повысить устойчивость вычислительных алгоритмов и улучшить аппроксимационные свойства численных схем.

Метод введения дополнительных аргументов представляет собой приём, основанный на расширении пространства независимых переменных с целью преобразования исходного дифференциального уравнения в систему, обладающую более благоприятными аналитическими или численными свойствами. Суть метода заключается в том, чтобы ввести одну или несколько новых переменных, функционально связанных с исходными, и переписать задачу в расширенном пространстве, где некоторые производные могут быть выражены через производные по дополнительным аргументам. Формально, пусть имеется параболическое уравнение вида:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = L[u(x,t)]+f(x,t),$$

где L — линейный или нелинейный дифференциальный оператор по пространственной переменной x, f(x,t) — заданная функция. Метод дополнительных аргументов предполагает введение новой переменной, например $\tau = \varphi(x,t)$, и переход к функции $v(x,t,\tau)$, связанной с $u(x,t)$ определённым преобразованием. Это позволяет переписать уравнение в форме:

$$\frac{\partial u}{dt} + \frac{du}{d\tau} = \tilde{L}[v] + \tilde{f}(x,t,\tau),$$

где $\tilde{L}$ — преобразованный оператор. При этом часто удаётся получить уравнение с более простой структурой или перевести задачу к классу задач, уже хорошо изученных в рамках других методов анализа.

Применение метода дополнительных аргументов имеет строгое математическое обоснование, опирающееся на теорию преобразований дифференциальных уравнений и инвариантных отображений. Введённые переменные интерпретируются как параметры, описывающие скрытые внутренние процессы или перемещения в функциональном пространстве решений. Подобные трансформации особенно полезны при наличии переменных коэффициентов или при необходимости учёта нелокальных условий.

Примером может служить замена переменной времени t на обобщённое "время" τ, зависящее от пространственной координаты x и/или других характеристик среды. Такой подход позволяет учитывать запаздывания, ускорения или градиенты внешних воздействий, преобразуя исходное уравнение в форму, более подходящую для интегрирования или разностной аппроксимации. При этом корректность замены обеспечивается выполнением условий гладкости функций и сохраняемости области определения задачи, что гарантирует эквивалентность решений в исходной и преобразованной системах.

С точки зрения функционального анализа, введение дополнительных аргументов соответствует переходу от одномерного времени в модели к многомерному параметрическому пространству, в котором могут быть выявлены инварианты задачи и применены более мощные аналитические средства.

Метод введения дополнительных аргументов имеет глубокие параллели с классическими методами преобразований, такими как преобразование Фурье, Лапласа, Меллина и другими. Все эти подходы так или иначе связаны с идеей перехода к новому представлению функции, в котором дифференциальные операторы заменяются алгебраическими, а уравнения — упрощаются.

Например, при применении преобразования Лапласа по времени:

$$L\{u(x,t)\}=u\hat{}(x,s)=\int_0^\infty - e - stu(x,t)dt,$$

временная производная ∂u/∂t\partial u / \partial t∂u/∂t заменяется на алгебраическое выражение su^−u(x,0)s \hat{u} - u(x,0)su^−u(x,0), что существенно упрощает решение уравнения.

Аналогично, в методе дополнительных аргументов временная переменная может быть заменена новой функцией τ=ϕ(t)\tau = \phi(t)τ=ϕ(t), а производные — выражены через цепное правило. При этом достигается аналогичный эффект «переноса сложности» из одной части уравнения в другую.

Метод также сопоставим с методами дифференциальных преобразований (см. Килибас, 2009), где функции аппроксимируются степенными рядами с коэффициентами, зависящими от производных. Введение дополнительного аргумента в этих случаях может интерпретироваться как параметризация ряда или временной масштаб.

Таким образом, предлагаемая методология не противоречит классическим подходам, а напротив — дополняет их, создавая гибкий инструментарий для преобразования и решения широкого класса параболических задач.

Параболические дифференциальные уравнения широко применяются для описания различных процессов, связанных с теплопроводностью, диффузией, фильтрацией, а также с распространением волн в диссипативной среде. В общем случае, параболическое уравнение второго порядка для скалярной функции u(x,t)u(x,t)u(x,t), определённой на некоторой области $\Omega \subset R^n$ и временном интервале $t \in (0,T]$, имеет вид:

$$\frac{\partial u}{dt}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{d^2u}{dx_i dx_j} + \sum_{i=1}^{n} bi(x,t)\frac{\partial u}{dx_i} + c(x,t)u+f(x,t),$$

где коэффициенты $a_{ij}(x,t)$, bi(x,t), c(x,t) и свободный член f(x,t) предполагаются заданными и удовлетворяющими условиям гладкости, обеспечивающим корректность задачи. Оператор второго порядка, включающий старшие производные, определяет параболичность уравнения при выполнении соответствующих условий на положительную полуопределённость матрицы коэффициентов $A(x,t)=[a_{ij}(x,t)]$. Это гарантирует диффузионный или тепловой характер задачи.

Для постановки задачи Коши или задачи с начально-краевыми условиями требуется задание начальных и граничных условий. Типичная постановка задачи включает начальное условие:

$u(x,0)=u_0(x),\ x \in \Omega$,

где $u_0(x)$ — заданная начальная функция, принадлежащая пространству непрерывных или обобщённых функций (в зависимости от постановки задачи). Для граничных условий чаще всего используются условия первого рода (Дирихле), второго рода (Неймана) или третьего рода (робиновы условия):

- Условие Дирихле: $u(x,t)=g_1(x,t),\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T]$;
- Условие Неймана: $\frac{du}{dn}(x,t)=g_2(x,t),\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T]$;
- Условие Робина: $\alpha(x,t)u(x,t)+\beta(x,t)\frac{du}{dn}(x,t)=g_3(x,t),\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T]$,

где $\partial\Omega$ — граница области, $\frac{d}{dn}$ — производная по внешней нормали, а функции g_1, g_2, g_3, как и коэффициенты α, β, считаются заданными и достаточно гладкими.

Тип и форма граничных условий определяются физическим смыслом моделируемого процесса. Например, в задачах теплопередачи условия Дирихле соответствуют заданной температуре, а условия Неймана — заданному тепловому потоку на границе.

Корректность задачи в смысле Адамара предполагает выполнение трёх условий: существования, единственности и устойчивости решения. Для параболических уравнений наличие этих свойств зависит от корректного выбора коэффициентов уравнения, начальных и граничных условий, а также от принадлежности исходных функций соответствующим функциональным пространствам (например, пространствам Соболева).

Согласно классическим результатам теории уравнений с частными производными [4], при выполнении следующих условий задача считается корректной:

- Коэффициенты $a_{ij}(x,t)$ непрерывны и матрица $A(x,t)$ симметрична и положительно полуопределённа;
- Начальная функция $u_0(x) \in C(\overline{\Omega})$ или $H^1(\Omega)$, в зависимости от постановки;
- Граничные функции $g_i(x,t) \in C(\partial\Omega\times[0,T])$;
- Свободный член $f(x,t)$ обладает ограниченной нормой в $L^2(\Omega\times(0,T))$ или другой подходящей метрике.

Устойчивость решения может быть доказана с использованием энергетических неравенств или априорных оценок. В рамках метода введения дополнительных аргументов необходимо обеспечить, чтобы преобразованная задача сохраняла свойства корректности, то есть преобразование не нарушало гладкости и принадлежности функций исходному пространству решений.

В современной теории дифференциальных уравнений метод введения дополнительных аргументов приобретает всё большее значение как универсальный инструмент преобразования сложных моделей в более удобные для анализа и численного решения формы. Особенно актуальным данный подход оказывается при исследовании параболических уравнений, описывающих разнообразные процессы переноса — теплопроводность, диффузию, фильтрацию и др. Преимущество метода заключается в возможности учета скрытых параметров, упрощения структуры уравнения, а также расширения класса допустимых решений. Ниже рассмотрим основные аспекты данного метода, включая алгоритм преобразования, вид получаемых уравнений, интерпретацию новых переменных и анализ свойств преобразованной модели.

Алгоритм преобразования параболического уравнения методом введения дополнительных аргументов включает несколько последовательных этапов, направленных на расширение пространства переменных и изменение формы уравнения:

1. *Выбор дополнительного аргумента*. В зависимости от характера задачи и структуры уравнения выбирается дополнительная переменная τ, как функция от известных переменных (например, времени): $\tau = \phi(t)$, где ϕ — строго монотонная гладкая функция.

2. *Формулировка преобразованной функции*. Вводится новая функция $v(x, t, \tau)$, такая что $u(x, t)=v(x, t, \phi(t))$, или в более общем виде — с использованием нескольких аргументов.

3. *Переход к новым производным*. С использованием цепного правила осуществляется переход от производных функции u к производным функции v по новым переменным.

4. *Подстановка в исходное уравнение*. Производные подставляются в исходное уравнение, после чего оно приводится к новому виду.

5. *Переопределение начальных и граничных условий*. Уточняются соответствующие условия для новой функции с учетом введенной переменной τ.

Пусть дано однородное параболическое уравнение следующего вида:

$$\frac{du}{dt} = \mathrm{a(x,t)}\frac{d^2u}{dx^2} + \mathrm{b(x,t)}\,\frac{du}{dx} + \mathrm{c(x,t)u+f(x,t)}$$

Введем дополнительный аргумент τ = ϕ(t), где ϕ — гладкая строго возрастающая функция. Определим новую функцию:

$$\mathrm{v(x,t,}\tau) = \mathrm{u(x,\ t)},$$

причем τ = ϕ(t).

Тогда по цепному правилу имеем:

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{d\tau} \times \frac{d\tau}{dt} = \frac{dv}{dt} + \phi'(\mathrm{t}) \times \frac{dv}{d\tau}$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, получим преобразованное уравнение:

$$\frac{dv}{dt} + \phi'(\mathrm{t}) \times \frac{dv}{d\tau} = \mathrm{a(x,t)}\,\frac{d^2u}{dx^2} + \mathrm{b(x,t)}\,\frac{dv}{dx} + \mathrm{c(x,t)v} + \mathrm{f(x,t)}$$

Полученная модель имеет дополнительную структуру, что позволяет применять к ней модифицированные численные и аналитические методы. Особенно эффективным данный подход оказывается при построении схем с переменной временной сеткой или при решении задач со специфическими внутренними процессами.

Дополнительный аргумент τ может иметь различные интерпретации в зависимости от физического или прикладного содержания задачи. В наиболее общем виде τ\tauτ отражает обобщённое или модифицированное время, адаптированное под свойства среды, внешние воздействия или нестационарный характер системы.

В задачах теплопереноса τ может моделировать так называемое «эффективное время», учитывающее неоднородности или температурные инерции. В биомедицинских приложениях τ может быть параметром, отражающим физиологическую реакцию со временем запаздывания. В механике сплошной среды дополнительный аргумент способен описывать скрытые внутренние параметры материала, например, накопление деформации или энергии.

Благодаря введению τ, модель получает более гибкую структуру, позволяющую описывать процессы, которые в стандартной постановке уравнения невозможно учесть без усложнения правой части или дополнительных условий.

Одним из ключевых этапов является исследование свойств преобразованного уравнения. Важно убедиться, что после введения дополнительного аргумента сохраняется корректность задачи, а также устойчивость и разрешимость модели.

Корректность задачи подтверждается, если преобразованное уравнение остаётся в классе параболических при выполнении аналогичных условий на коэффициенты. Гладкость и монотонность функции ϕ(t) обеспечивает однозначность перехода между переменными.

Устойчивость решений можно анализировать при помощи энергетических или априорных оценок. При этом учитываются производные по новой переменной τ, что требует адаптации классических подходов. Например, при использовании метода Галёркина или конечно-разностных схем необходимо ввести шаг по τ, согласованный с шагом по t, что влияет на выбор устойчивой аппроксимации.

Разрешимость преобразованной задачи доказывается методами функционального анализа, в частности, с использованием теории обобщённых решений в пространстве Соболева. При этом введение τ может облегчить доказательство теорем существования и единственности решения, особенно в случае ослабленных начальных данных или нелокальных условий.

Таким образом, метод введения дополнительных аргументов является не только инструментом преобразования уравнений, но и способом расширения теоретических и прикладных возможностей в рамках анализа параболических задач.

После преобразования исходного параболического уравнения методом введения дополнительных аргументов следующим этапом является решение полученной модели. Благодаря добавлению новой переменной уравнение может приобрести более благоприятную для анализа и численной реализации структуру. При выборе способа решения важно учитывать особенности конкретной задачи, включая гладкость коэффициентов, тип граничных условий и требования к точности. Ниже рассмотрены основные подходы к решению преобразованной задачи, включая как аналитические методы, так и численные схемы, а также приведены критерии оценки точности и сходимости.

В зависимости от вида преобразованного уравнения можно выбрать аналитический или численный способ решения.

Аналитические методы предпочтительны, когда коэффициенты уравнения постоянны или имеют простую зависимость, граничные условия — однородные, а область — прямоугольная или цилиндрическая. В таких случаях возможно применение классических методов — разделения переменных, преобразований Фурье, Лапласа или вариационных принципов.

Если же уравнение содержит переменные коэффициенты, сложные начальные или граничные условия, или определено в сложной геометрической области, более целесообразным является **численный подход**, обеспечивающий универсальность и гибкость. Особенно эффективны в этом контексте методы конечных разностей и конечных элементов.

Метод разделения переменных применяется, если уравнение и условия допускают представление решения в виде произведения функций, зависящих от отдельных переменных. В контексте дополнительного аргумента τ, метод требует особого внимания к совместимости условий и согласованности начальных данных по τ.

Метод конечных разностей является одним из наиболее распространённых численных методов. Его преимущество — в простоте реализации и адаптации под конкретные формы уравнений. При решении уравнения вида:

$$\frac{dv}{dt}\,\phi'(t) \times \frac{dv}{d\tau} = a(x,t)\,\frac{d^2u}{dx^2} + b(x,t)\,\frac{dv}{dx} + c(x,t)v + f(x,t)$$

конструктивно удобно построить сетку по x, t и τ, используя схему типа «сетка в трёх измерениях». При этом важно выбирать согласованные шаги, особенно по переменной τ, поскольку она зависит от t.

Метод конечных элементов особенно эффективен при решении задач в сложных геометриях или при необходимости локального уточнения. Применение метода возможно и в многомерном пространстве, включая дополнительную переменную, при этом формулируется вариационная задача на обобщённое пространство $H^1(\Omega\times[0,T] \times [\tau_0,\tau_1])$.

Для повышения точности применяются схемы повышенного порядка аппроксимации, адаптивные сетки и сглаживающие процедуры.

Ключевыми характеристиками любого метода решения являются **точность** (ошибка аппроксимации) и **сходимость** (приближение к точному решению при уменьшении шага сетки). Оценка этих параметров особенно важна в случае введения дополнительного аргумента, так как структура модели усложняется.

Для методов конечных разностей оценка точности обычно проводится через локальную и глобальную погрешность. Например, при использовании неявной схемы второго порядка погрешность аппроксимации по x и t составляет $O(h^2+\Delta t^2)$, но при введении τ следует учитывать зависимость производной $\partial v/\partial \tau$ от точности аппроксимации $\phi(t)$ и шага $\Delta\tau$.

Для метода конечных элементов важным критерием является энергия ошибки, оцениваемая в нормах пространств Соболева, таких как H^1 и L^2. Сходимость подтверждается априорными оценками, которые можно адаптировать с учетом дополнительной переменной.

Существенное значение имеют также **устойчивость** и **численная реализация**. Устойчивость схемы можно проверить методом фон Неймана, проведя спектральный анализ с учетом всех переменных. При этом введение τ может потребовать дополнительной стабилизации (например, использование схем Кранка-Николсона или схем с регуляризацией).

Таким образом, выбор метода решения преобразованной задачи зависит от множества факторов — от структуры уравнения до требований к точности, и метод введения дополнительных аргументов способен повысить гибкость и эффективность моделей при сохранении их корректности и математической строгости.

Применение метода введения дополнительных аргументов к решению параболических уравнений позволяет по-новому взглянуть на структуру задачи и реализовать более эффективные численные или аналитические схемы. Одним из ключевых преимуществ является возможность локализации влияния временной переменной, перераспределения вычислительной нагрузки и устранения некоторых трудностей, связанных с негладкостью решений по времени.

Кроме того, введение дополнительной переменной, зависящей от времени или других параметров, позволяет в некоторых случаях линеаризовать исходную модель или привести её к более простому виду. Это, в свою очередь, упрощает реализацию численных методов, повышает устойчивость схем и улучшает сходимость решений.

Однако вместе с этими достоинствами подход имеет и ряд ограничений. Во-первых, увеличение размерности задачи ведёт к росту вычислительной сложности и потребности в ресурсах. Во-вторых, выбор формы дополнительного аргумента и способа его связи с исходными переменными требует тщательного анализа и может повлиять на корректность интерпретации решения. Также важно учитывать влияние новых переменных на устойчивость и физический смысл модели.

Метод введения дополнительных аргументов обладает высокой степенью универсальности и может быть адаптирован для широкого класса задач. Например, его можно применять не только к одномерным, но и многомерным уравнениям, включая системы с переменными коэффициентами, нелинейными членами или стационарными условиями.

Перспективным направлением развития метода является его интеграция с вариационно-разностными схемами и методами машинного обучения. Также метод может быть адаптирован для решения задач с разрывными коэффициентами или сингулярностями, что открывает путь к применению в задачах теории фильтрации, теплообмена в средах со сложной структурой, биофизических моделях и др.

Метод особенно эффективен в задачах, где классическое время играет ключевую роль, но наблюдаются трудности с его интерпретацией — например, в задачах с запаздыванием, памятью или фракционной производной. Он может быть использован в теплофизике, электродинамике, химической кинетике и биомоделировании.

Кроме того, введение дополнительных аргументов находит применение в стохастических моделях, где переменная может описывать случайное возмущение, а также в задачах оптимального управления, где используется параметризация по времени.

В данной работе был рассмотрен метод введения дополнительных аргументов для решения параболических уравнений, как один из подходов повышения эффективности аналитических и численных методов. Проведённый теоретический анализ и обсуждение алгоритма преобразования показали, что данный подход может существенно упростить структуру уравнений и повысить устойчивость методов решения.

Выделены преимущества метода: гибкость, возможность расширения и высокая степень адаптируемости к различным постановкам. Вместе с тем, подчёркнуты ограничения, касающиеся роста размерности и сложности реализации. Показано, что метод имеет широкую применимость в задачах математической физики и инженерного моделирования.

Список использованных источников

1. Айтпаева А.Э. Конечно-разностная аппроксимация параболической задачи оптимального управления / А. Э. Айтпаева // Наука и инновационные технологии. – 2018. – № 3(8). – С. 13-15. – EDN YSBJNR.

2. Кененбаев Э. Приближенное решение дифференциальных уравнений с помощью функциональных соотношений / Э. Кененбаев // Наука и инновационные технологии. – 2022. – № 4(25). – С. 21-28. – DOI 10.33942/sit042203. – EDN ALIEET.

3. Кренкель Б.М., Фурсенко И. А. Параболические уравнения в многомерных пространствах. — Новосибирск: СО РАН, 2003. — 272 с.

4. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики: Учеб. пособ. для студентов вузов. - М.: Наука, 1973. - 408 с.

5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. — 736 с.

6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 624 с.

7. Рыжов И.В. Анализ и численные методы решения дифференциальных уравнений с запаздыванием. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2011. — 198 с.

8. Фадеев Д.К., Фадеев Л.Д. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.: Наука, 1963. — 512 с.