

АНАЛИЗ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА И РЕАЛИЗАЦИИ СВЯЗУЮЩЕГО ИНТЕГРАЛА ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ДЕЙСТВИЙ ПО НЕРВНОМУ ВОЛОКНУ

Сатыбаев А.Дж.,¹ Курманалиева Г.С.²

⁽¹⁾ Ошский технологический университет, E-mail: abdu-satybaev@mail.ru,

⁽²⁾ Ошский технологический университет, E-mail: gulzat-kurmanalieva@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассмотрен алгоритм анализа для определения способности действия по нервному волокну. Процесс оформления с использованием систем параболической и гиперболической моделей, отражающих различные физические аспекты распространения сигнала. Параболическая модель описывает медленное поведение распространяющихся процессов, таких как теплопроводность, а гиперболическая модель более точно моделирует быстрые изменения, характерные для нервных импульсов. Особое внимание уделено реализации связующего интеграла, который обеспечивает согласованное взаимодействие между моделями моделей.

В данной статье разработан алгоритм численной реализации обратной параболической задачи, основанный на использовании математической модели, описывающей распространение потенциала действий в нервном волокне. Проведенный расчетный анализ позволяет оценить точность и устойчивость предложенного метода, а также его эффективность для больших временных и пространственных масштабов. Применение данного метода может значительно повысить точность моделей нейронных сетей, улучшив понимание процессов передачи данных в сети.

Ключевые слова: Нервное волокно; распространение потенциала; одномерная; обратная параболическая задача; алгоритм; численное решение; компьютерная реализация.

НЕРВ ТАЛЧАЛАРЫНДАГЫ ПОТЕНЦИАЛДЫН ТАРАЛУУСУНУН ПАРАБОЛИКАЛЫК ЖАНА ГИПЕРБОЛИКАЛЫК МАСЕЛЕЛЕРИН БАЙЛАНЫШТЫРУУЧУ ИНТЕГРАЛДЫН САНДЫК АЛГОРИТМИН ТАЛДОО ЖАНА ЭСЕПТӨӨ

Сатыбаев А.Ж.,¹ Курманалиева Г.С.²

⁽¹⁾ Ош технологиялык университети, E-mail: abdu-satybaev@mail.ru,

⁽²⁾ Ош технологиялык университети, E-mail: gulzat-kurmanalieva@mail.ru

Аннотация. Бул макалада нерв жиңчеси боюнча иши-аракет жөндөмдүүлүгүн аныктоо үчүн анализ алгоритми талкууланат. Сигналдын таралышынын ар кандай физикалык аспекттерин чагылдырган параболикалык жана гиперболикалык моделдик системаларды колдонуу менен долбоорлоо процесси. Параболикалык модель жылуулук өткөрүмдүүлүк сыйктуу таралуучу процесстердин жай жүрүм-турумун сүрөттөйт, ал эми гиперболикалык модель нерв импульстарына мүнөздүү тез өзгөрүүлөрдү тагыраак моделдейт. Моделдик

моделдердин ортосундагы ырааттуу өз ара аракеттенүүнү камсыз кылуучу бириктируучу интегралды ишке аширууга өзгөчө көңүл бурулат.

Бул макалада нерв талчасында аракет потенциалынын таралышын сүрөттөгөн математикалык модельди колдонуунун негизинде тескери параболикалык маселенин сандык ишке ашируу алгоритми иштелип чыккан. Жүргүзүлгөн эсептөө анализи сунуш кылынган ыкманын тактыгын жана түрүктүүлүгүн, ошондой эле чоң убакыт жана мейкиндик масштабдары учун анын натыйжалуулугун баалоого мүмкүндүк берет. Бул ыкманы колдонуу тармактағы маалыматтарды берүү процесстерин түшүнүүнү жасакыртып, нейрондук тармак моделдеринин тактыгын бир топ жогорулата алат.

Негизги сөздөр: Нерв жипчелери; потенциалды жайылтуу; бир өлчөмдүү; тескери параболикалык маселе; алгоритм; сандык чечим; компьютердик ишке ашируу.

ANALYSIS OF THE NUMERICAL ALGORITHM AND IMPLEMENTATION OF THE CONNECTING INTEGRAL OF THE PARABOLIC PROBLEM AND THE HYPERBOLIC PROBLEM OF PROPAGATION OF THE ACTION POTENTIAL ALONG A NERVE FIBER

Satybaev A.J.¹ Kurmanalieva G.S.²

⁽¹⁾ Osh technological university, E-mail: abdu-satybaev@mail.ru,

⁽²⁾ Osh technological university, E-mail: gulzat-kurmanalieva@mail.ru

Annotation. This paper discusses an analysis algorithm for determining the ability of action along a nerve fiber. Design process using parabolic and hyperbolic model systems that reflect various physical aspects of signal propagation. The parabolic model describes the slow behavior of propagating processes such as heat conduction, while the hyperbolic model more accurately models the rapid changes characteristic of nerve impulses. Particular attention is paid to the implementation of the connecting integral, which ensures consistent interaction between model models.

This article develops an algorithm for the numerical implementation of the inverse parabolic problem, based on the use of a mathematical model that describes the propagation of action potential in a nerve fiber. The computational analysis carried out allows us to evaluate the accuracy and stability of the proposed method, as well as its effectiveness for large time and spatial scales. The use of this method can significantly increase the accuracy of neural network models, improving the understanding of data transmission processes in the network.

Key words: Nerve fiber; capacity dissemination; one-dimensional; inverse parabolic problem; algorithm; numerical solution; computer implementation.

Введение. Моделирование распространения потенциала действия по нервному волокну является одной из ключевых задач математической биофизики и нейрофизиологии, поскольку оно позволяет глубже понять механизмы передачи нервных сигналов и потенциала действия. Динамика этого процесса часто описывается уравнениями в частных производных, включающими как параболические, так и гиперболические компоненты. Параболическая модель обычно используется для описания процессов диффузии, тогда как гиперболическая модель подходит для моделирования волновых процессов, характерных для быстрого распространения нервных импульсов. Сочетание обеих моделей позволяет получить более полное и точное описание динамики.

Одной из сложностей является корректная реализация связующего интеграла, который объединяет обе модели и обеспечивает согласованное поведение решения. Связующий интеграл позволяет избежать конфликтов между параболическим и гиперболическим решениями, создавая единое поле потенциала действия, которое отражает как локальные, так и глобальные свойства нервного импульса. Однако численная реализация такого интеграла требует тщательного анализа алгоритма, учитывающего точность и устойчивость вычислений при больших временных и пространственных масштабах.

Цель данной работы – проанализировать численный алгоритм для решения задачи распространения потенциала действия, включающий связующий интеграл между параболической и гиперболической моделями. Оценка эффективности алгоритма и устойчивости его реализации позволит не только лучше понять механизмы распространения нервного сигнала, но и расширить возможности применения численных моделей в нейробиологии и биоинженерии.

Постановка задачи. Математическая модель процесса распространения импульса по аксону (по нервному волокну) описывается параболическим уравнением [1]

$$C_m(x)u_t'(x,t) = \frac{r_a(x)}{2\rho_a(x)}u_{xx}''(x,t) - \frac{u(x,t)}{\rho_m(x)\cdot l}, \quad x \in R_+, \quad t \in R_+, \quad (1)$$

$$u(x,t)|_{t<0} \equiv 0, \quad u_x'(x,t)|_{x=0} = h_0\theta(t) + r_0\theta_1(t) + \rho_0\theta_2(t), \quad t \in R_+, \quad (2)$$

где h_0 , r_0 , ρ_0 – заданные положительные числа, $\theta(t)$ – тета функция Хевисайда, $\theta_1(t) = t\theta(t)$, $\theta_2(t) = \frac{t^2}{2}\theta(t)$, $r_a(x)$ – радиус нервной волокны и аксоны, индексы: a -аксона, m – мембрана, $\rho_m(x)$, $\rho_a(x)$ – удельное сопротивление плазмы и нервной волокны, $C_m(x)$ – емкость на единицу площади мембранны, l – толщина мембранны, $u(x,t)$ – плотность электрического тока в точке x во времени t .

Обратная параболическая задача заключается в определении одного из коэффициентов уравнения (1) и функции $u(x,t)$ при дополнительной информации вида

$$u(x,t)|_{x=0} = g(t), \quad t \in [0, T], \quad T > 0. \quad (3)$$

Используя методику Кабанихина [2, стр. 342] приводим обратную задачу (1) – (3) к обратной задаче уравнения гиперболического типа.

$$C_m(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = \frac{r_a(x)}{2\rho_a(x)} \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} - \frac{V(x,t)}{\rho_m(x)\cdot l}, \quad (x,t) \in R_+^2, \quad (4)$$

$$V(x,t)|_{t<0} \equiv 0, \quad \left. \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = h_0\delta(t) + r_0\theta(t) + \rho_0\theta_1(t), \quad t \in R_+, \quad (5)$$

$$V(x,t)|_{x=0} = f(t), \quad t \in [0, 2T] \quad (6)$$

Теоретическое обоснование. Рассмотрим связь между решениями прямой задачи параболического типа (1) и гиперболического типа (4). Она дается интегралом

$$u(x,t) = \int_0^\infty V(x,\tau)G(t,\tau)d\tau, \quad G(t,\tau) = \left(1/\sqrt{\pi}\right) \exp\left(-\tau^2/4t\right), \quad (7)$$

где $u(x, t)$, $V(x, t)$ - решения задач параболической и гиперболической соответственно.

В обратных задачах параболического и гиперболического типа связующий интеграл будет

$$\begin{aligned} p\rho_a(x) &= \int_0^\infty g\rho_a(\xi)G(x, \xi)d\xi, \\ G(x, \xi) &= (1/\sqrt{\pi}) * \exp(-\xi^2/4t), \end{aligned} \quad (8)$$

здесь $p\rho_a(x)$, $g\rho_a(x)$ - решения обратных задач параболической и гиперболической соответственно.

Предположим, что решение прямой гиперболической задачи (4) $V(x, t)$ достаточно гладкие, растут при $t \rightarrow \infty$ не быстрее, чем $Ce^{\alpha t}$, $\alpha > 0$, то формула (7) устанавливает связь между решениями прямых задач параболической (1) и гиперболической (4) взаимно однозначное соответствие. [2].

Поэтому, теоремы единственности, доказанные для коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений, могут быть перенесены на соответствующие единственности обратных задач для параболических уравнений [2].

Пусть, решение обратной гиперболической задачи $g\rho_a(x)$ достаточно гладкая функция и растет при $t \rightarrow \infty$ не быстрее, чем $Ce^{\alpha t}$, $\alpha > 0$, то формула (8) устанавливает связь между решениями обратных задач параболической (1) и гиперболической (4) взаимно однозначное соответствие [2].

Численное обоснование. Рассмотрим численное решение связующего интеграла (8) между решениями обратной задачи параболического уравнения и обратной задачи гиперболического уравнения.

Пусть $\tau \in [0, T]$, введем шаги сетки $tau = T/2N$, N – количество сетки, $ta = T/N$, здесь tau, ta шаги сетки по переменным τ и t соответственно. Тогда интеграл (8) будет

$$p\rho_a(x) = \int_0^T g\rho_a(\tau)G(x, \tau)d\tau, \quad \tau \in [0, T]. \quad (8)$$

Введем также сеточные функции

$$p\rho_i = p\rho_a(x_i), \quad g\rho_i = g\rho_a(x_i), \quad G_{ij} = G(x_i, \tau_j), \quad i = \overline{0, N}; \quad j = \overline{0, 2N}.$$

Используя метод прямоугольников для интеграла (8) получим

$$p\rho_i = \sum_{j=0}^{2N} g\rho_j * G_{ij}tau, \quad i = \overline{0, N}, \quad (9)$$

$$G_{ij} = \left(\left(1/\sqrt{\pi \cdot i \cdot tau} \right) \exp \left((-j * tau)^2 / (4 \cdot i \cdot tau) \right) \right), \quad j = \overline{0, 2N}.$$

Отметим, что по свойству метода прямоугольников численное решение сеточной функции (9) сходится к точному решению (8) в порядке $O(\tau)$.

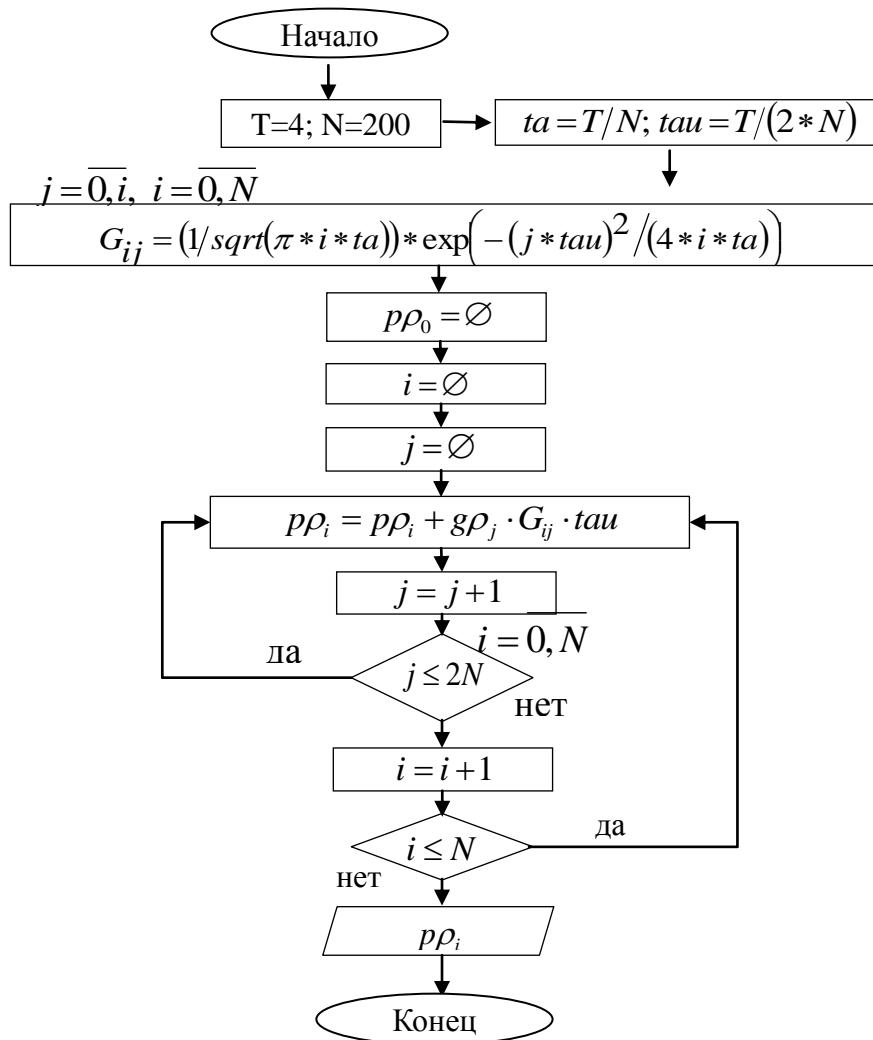
Если распишем (9), то получим следующие вычисления:

$$\begin{aligned}
 p\rho_0 &= g\rho_0 \cdot G_{00} \cdot tau; \\
 p\rho_1 &= g\rho_0 \cdot G_{00} \cdot tau + g\rho_1 \cdot G_{10} \cdot tau + g\rho_1 \cdot G_{11} \cdot tau; \\
 p\rho_2 &= g\rho_0 \cdot G_{00} \cdot tau + g\rho_1 \cdot G_{10} \cdot tau + g\rho_2 \cdot G_{11} \cdot tau + g\rho_2 \cdot G_{20} \cdot tau + \\
 &+ g\rho_2 \cdot G_{21} \cdot tau + g\rho_2 \cdot G_{22} \cdot tau; \\
 p\rho_N &= g\rho_0 \cdot G_{00} \cdot tau + g\rho_1 \cdot G_{10} \cdot tau + g\rho_1 \cdot G_{11} \cdot tau + \dots + g\rho_{2N} \cdot G_{N,2N} \cdot tau;
 \end{aligned}$$

В численных решениях нами были взяты следующие значения:

$$T = 4, t \in [0, T], \tau \in [0, T], N = 200, ta = T/N, tau = T/(2 \cdot N).$$

Блок схема решения.



- Таблица 1. РПДНВ-1-8Waves^21_Параb

№ рис унк а	Восстановле мая функция roa(z)	z	cm1	ra1	rom1	Ошибка измере ния max %	Относите льная погрешно сть между точным и k-p-r решением
1.1	$3.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	0.2	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.01	5.3168
1.2	$3.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	0.4	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.01	5.3161
1.3	$3.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	0.6	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.01	5.3149
1.4	$3.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	0.8	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.01	5.3133
1.5	$3.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	1	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.01	18.8744
2.1	$3.1 - \cos^2(4.71 \cdot z)$	1	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.01	12.8742
2.2	$3.1 - \cos^2(3.14 \cdot z)$	1	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.01	15.8362
2.3	$3.1 - \cos^2(1.57 \cdot z)$	1	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.01	18.8586
2.4	$3.1 - \cos^2(0.785 \cdot z)$	1	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.01	19.5716
2.5	$3.1 - \cos^2(0.393 \cdot z)$	1	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.01	19.7673
3.1	$3.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	1	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.0005	13.0043
3.2	$3.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	1	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.001	13.3078
3.3	$3.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	1	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.002	13.9165
3.4	$3.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	1	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.003	14.5277
3.5	$3.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	1	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.004	15.1413
4.1	$3.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	0.6	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.01	5.3149
4.2	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	0.6	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.01	8.6050
4.3	$1.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	0.6	$2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	$3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$	± 0.01	10.9452

- Таблица 2. РПДНВ-2Waves^4_Параb

№ рисунка	Восстановляемая функция $roa(z)$	z	cm1	ra1	rom1	Ошибка измерения max %	Относительная погрешность между точным и k-p-p решением
1.1	$roa(z) = 13 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	0.2	1	1	1	± 0.001	2.9187
1.2	$roa(z) = 13 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	0.4	1	1	1	± 0.001	3.1905
1.3	$roa(z) = 13 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	0.6	1	1	1	± 0.001	3.1762
1.4	$roa(z) = 13 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	0.8	1	1	1	± 0.001	9.5722
1.5	$roa(z) = 13 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	1	1	1	1	± 0.001	9.6533
1.6	$roa(z) = 13 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	2	1	1	1	± 0.001	10.0797
1.7	$roa(z) = 13 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	3	1	1	1	± 0.001	11.3908
1.8	$roa(z) = 13 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.001	14.4532
1.9	$roa(z) = 13 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	5	1	1	1	± 0.001	15.2362
1.10	$roa(z) = 13 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	6	1	1	1	± 0.001	22.3972
2.1	$roa(z) = 13 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.0001	13.0161
2.2	$roa(z) = 13 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.002	16.0664
2.3	$roa(z) = 13 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.003	17.6972
2.4	$roa(z) = 13 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.004	19.3456
2.5	$roa(z) = 13 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.005	21.0118
3.1	$roa(z) = 8 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.001	12.1435
3.2	$roa(z) = 7 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.001	12.0024
3.3	$roa(z) = 6 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.001	12.6227
3.4	$roa(z) = 5 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.001	13.1797
3.5	$roa(z) = 4 - \cos^4(3.14 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.001	9.8415
4.1	$roa(z) = 13 - \cos^4(6.28 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.001	14.5162
4.2	$roa(z) = 13 - \cos^4(4.71 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.001	14.3814
4.3	$roa(z) = 13 - \cos^4(1.57 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.001	14.3301
4.4	$roa(z) = 13 - \cos^4(0.785 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.001	13.6263

- Таблица 3. РПДНВ-8Waves^2_Параb

№ рисунка	Восстанавливаемая функция $roa(z)$	z	cm1	ra1	rom1	Ошибка измерения max %	Относительная погрешность между точным и k-p-p решением
1.1	$roa(z) = 3 - 0.2 \cos^2(12.58 \cdot z)$	0.2	1	1	1	± 0.001	0.6170
1.2	$roa(z) = 3 - 0.2 \cos^2(12.58 \cdot z)$	0.4	1	1	1	± 0.001	0.6178
1.3	$roa(z) = 3 - 0.2 \cos^2(12.58 \cdot z)$	0.6	1	1	1	± 0.001	0.7258
1.4	$roa(z) = 3 - 0.2 \cos^2(12.58 \cdot z)$	0.8	1	1	1	± 0.001	0.7228
1.5	$roa(z) = 3 - 0.2 \cos^2(12.58 \cdot z)$	1	1	1	1	± 0.001	0.9082
1.6	$roa(z) = 3 - 0.2 \cos^2(12.58 \cdot z)$	2	1	1	1	± 0.001	1.4326
1.7	$roa(z) = 3 - 0.2 \cos^2(12.58 \cdot z)$	3	1	1	1	± 0.001	2.4626
1.8	$roa(z) = 3 - 0.2 \cos^2(12.58 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.001	3.6954
2.1	$roa(z) = 3 - 0.2 \cos^2(12.58 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.01	13.1167
2.2	$roa(z) = 3 - 0.2 \cos^2(12.58 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.02	24.4002
2.3	$roa(z) = 3 - 0.2 \cos^2(12.58 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.002	4.7030
2.4	$roa(z) = 3 - 0.2 \cos^2(12.58 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.003	5.7181
2.5	$roa(z) = 3 - 0.2 \cos^2(12.58 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.004	6.7409
2.6	$roa(z) = 3 - 0.2 \cos^2(12.58 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.005	7.7809
3.1	$roa(z) = 8 - 0.2 \cos^2(13.58 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.01	16.1764
3.2	$roa(z) = 7 - 0.2 \cos^2(11.58 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.01	15.7121
3.3	$roa(z) = 6 - 0.2 \cos^2(10.58 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.01	13.1178
3.4	$roa(z) = 5 - 0.2 \cos^2(9.58 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.01	13.1116
3.5	$roa(z) = 4 - 0.2 \cos^2(8.58 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.01	13.1291
4.1	$roa(z) = 3 - 0.1 \cos^2(12.58 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.01	13.0888
4.2	$roa(z) = 3 - 0.3 \cos^2(12.58 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.01	13.1515
4.3	$roa(z) = 3 - 0.4 \cos^2(12.58 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.01	13.2187
4.4	$roa(z) = 3 - 0.5 \cos^2(12.58 \cdot z)$	4	1	1	1	± 0.01	13.3023

- Таблица 4. РПДНВ-12Pulse_Параб

№ рисунка	Восстановляемая функция $\rho_{a(z)}$	z	cm1	ra1	rom1	Ошибка измерения max %	Относительная погрешность между точным и k-р-р решением
1.1	Импульсная	0.2	1	1	1	± 0.001	0.9902
1.2	Импульсная	0.4	1	1	1	± 0.001	1.0583
1.3	Импульсная	0.6	1	1	1	± 0.001	1.1293
1.4	Импульсная	0.8	1	1	1	± 0.001	1.2029
1.5	Импульсная	1	1	1	1	± 0.001	1.2793
1.6	Импульсная	2	1	1	1	± 0.001	1.7079
1.7	Импульсная	3	1	1	1	± 0.001	2.5639
1.8	Импульсная	4	1	1	1	± 0.001	3.9156
2.1	Импульсная	4	1	1	1	± 0.01	17.8338
2.2	Импульсная	4	1	1	1	± 0.02	35.1803
2.3	Импульсная	4	1	1	1	± 0.002	5.3344
2.4	Импульсная	4	1	1	1	± 0.003	6.7681
2.5	Импульсная	4	1	1	1	± 0.004	8.2845
2.6	Импульсная	4	1	1	1	± 0.005	9.8330

- Таблица 5. РПДНВ-Saw_Параб

№ рисунка	Восстановляемая функция $\rho_{a(z)}$	t	cm1	ra1	rom1	Ошибка измерения max %	Относительная погрешность между точным и k-р-р решением
1.1	Ступенчатая	0.2	1	1	1	± 0.001	7.4893
1.2	Ступенчатая	0.4	1	1	1	± 0.001	7.7118
1.3	Ступенчатая	0.6	1	1	1	± 0.001	8.0031
1.4	Ступенчатая	0.8	1	1	1	± 0.001	8.4246
1.5	Ступенчатая	1	1	1	1	± 0.001	8.8696
1.6	Ступенчатая	2	1	1	1	± 0.001	12.2018
1.7	Ступенчатая	3	1	1	1	± 0.001	17.2374
1.8	Ступенчатая	4	1	1	1	± 0.001	23.3386
2.1	Ступенчатая	2	1	1	1	± 0.0005	11.6476
2.2	Ступенчатая	2	1	1	1	± 0.001	12.2018

Вывод. Численный анализ и компьютерная реализация.

В качестве искомой тестовой функции обратной задачи в начале мы взяли косинусообразную функцию (эта функция соответствует на требования искомой функции), $\rho_a(z)=3.1-\cos^2(6.28z)$. Эта функция положительная, при $z=0 \rho_a(z)=2.1$ четная, дифференцируемая.

В начале мы проверили до какого момента мы сможем вычислить, то есть, созданный нами алгоритм и разработанная нами программа до какого расстояния сможет вычислить решение обратной задачи, в данном случае для параболической задачи.

Таким образом мы последовательно увеличивали расстояния z от 0.2 до 1 (условно метр, в нашем случае распространения потенциала действий нервного волокна). Как видно из табл.1 РПДНВ-1-8Waves²¹_Параб, пункты 1.1–1.5 относительная погрешность увеличивается от 5.31% - 18.87%. Это означает, в этом случае искомой функции сможем провести вычисления не более 1 условной единицы (м).

Отметим, что вычисления решения обратной задачи в программе РПДНВ-1-8Waves²¹_Параб, производились при других параметрах, которые когда они непрерывные функции: $Cml(z) = 2.1 - \cos^2(6.28z)$, $ral(z) = 2.6 - \cos^2(6.28z)$, $\rho ml(z) = 3.6 - \cos^2(6.28z)$.

Таким образом, с увеличением расстояния вычисления обратной задачи увеличивается относительная погрешность, что подтверждает теоретической оценки погрешности.

Из-за ограниченности страницы здесь мы привели только рис.1.

В пунктах 2.1–2.5 таблицы РПДНВ-2Waves⁴_Параб, последовательно уменьшаем γ от 4.71 до 0.393. Во всех вычислениях мы условно ввели обозначения α, β, γ где $\rho_a(z) = \alpha - \beta \cdot \cos^2(\gamma \cdot z)$.

Выявлено, что с уменьшением γ относительная погрешность увеличивается. Здесь норма для γ должна быть $\gamma = 0.393$. Тогда относительная погрешность составляет 19.77% и привели рис.2 этому случаю.

В следующем шаге мы изменили ε - погрешность измерения, то есть, последовательно увеличивали ε от ± 0.0005 до ± 0.004 . В этом случае относительная погрешность определения решения обратной задачи параболического уравнения также увеличивается от 13% до 15.14% (см. пункты 3.1–3.5 таблицы РПДНВ-2Waves⁴_Параб). Анализируя мы остановились на том, что ε -погрешность измерения можно взять до 0.01.

В последних пунктах 4.1–4.3 табл.1 мы уменьшали α - свободный член от 3.1 до 1.1. Тогда нами выяснено, что относительная погрешность определения решения обратной задачи параболического уравнения увеличивается от 5.31% до 11%.

Анализируя, мы выяснили α уменьшить до 0 и привели рис.4.

В табл.2. РПДНВ-2Waves⁴_Параб приведены решения обратной задачи параболического уравнения, когда искомая функция непрерывная функция вида $\rho_a(z) = \alpha + \beta \cdot \cos^4(\gamma \cdot z)$, где $\alpha = 13, 8 \div 4$; $\beta = 1$, $\gamma = 3.14, 6.28 \div 0.785$, а другие параметры уравнения $Cml = ral = \rho ml = 1$.

В пунктах 1.1–1.10 табл.2 расчеты приведены для z , z меняется от 0.2 до 6, то есть, $z = 0.2 \div 6$, $\alpha = 13$, $\beta = 1$, $\gamma = 3.14$, $\varepsilon = \pm 0.001$. Как видно из табл.2 относительная погрешность между точным и конечно-разностным регуляризованным решением (к-р-р-р) обратной задачи параболического уравнения также последовательно увеличивается от 2.91% до 22.40%.

Таким образом, в этом случае алгоритм работает при $z=5$ у.е. Этот пример также подтверждает теоретически обоснованную оценку. Здесь мы дали рис.5.

В следующем этапе (пункты 2.1–2.5) восстановили в обратной задаче параболического уравнения, функции $\rho_a(z) = 13 - \cos^4(3.14z)$, при $z=4$, $Cml = ral = \rho ml = 1$, а погрешность измерения ε последовательно увеличивали от ± 0.001 до ± 0.005 , то есть, $\varepsilon = 0.001 \div 0.005$.

Как показаны в пунктах 2.1–2.5 относительная погрешность между точным и к-р-р решением увеличивается от 13.01% до 21%. Таким образом, ε можно взять до 0.004. Приведен график (рис.6).

В пунктах 3.1-3.5 табл.2 мы свободный член α уменьшили от 8 до 4, тогда погрешность уменьшается. Дан рис.7.

В следующем шаге уменьшили γ от 6.2 до 0.785. Относительная погрешность уменьшается, см. пункты 4.1–4.5. Приведен рис.8.

В табл.3 РПДНВ-8Waves^2_Параб. также восстановили непрерывную функцию $\rho a(z) = \alpha - \beta \cdot \cos^2(\gamma \cdot z)$, α, β, γ даны в этой таблице, $Cml = ral = \rho ml = 1$. Здесь тоже такое восстановление как в предыдущих табл.1 и 2.

В табл.4. РПДНВ-12Pulse_Параб дано восстановление импульсной функции, дано в рис.9 и 10. Здесь также относительная погрешность увеличивается, что и подтверждает теоретическую оценку. $z = 0,2 \div 4$, $Cml = ral = \rho ml = 1$.

А в табл.5. РПДНВ-Saw_Параб ввели расчеты восстановления ступенчатой функции (рис.15 и 16). $z = 0,1 \div 3$, $Cml = ral = \rho ml = 1$. Также относительная погрешность между точным и к-р-р решениями повышается.

Замечание: Здесь были взяты графики тех функций, в которых относительная погрешность между точным и конечно-разностным регуляризованным решениями самая большая. В табл.1–5 даны все значения исследуемой функций $\rho_a(z)$.

Графики таблицы 1

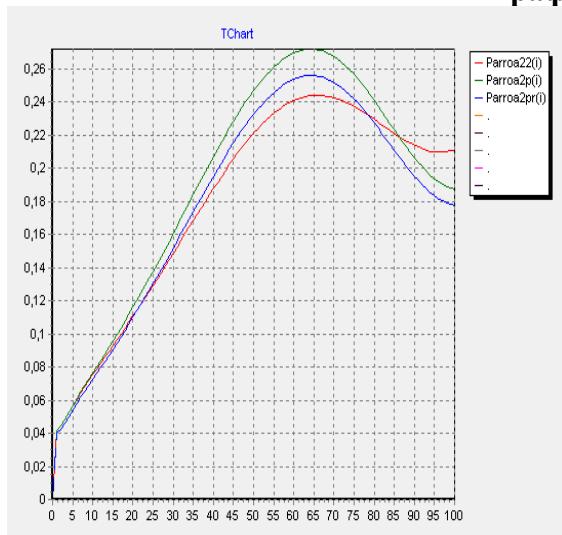


Рис.1. $rod(z) = 3.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$,
 $Cm(z) = 2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$,
 $ra(z) = 2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$,
 $rom(z) = 3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$, $z = 1$, $\varepsilon = \pm 0.01$

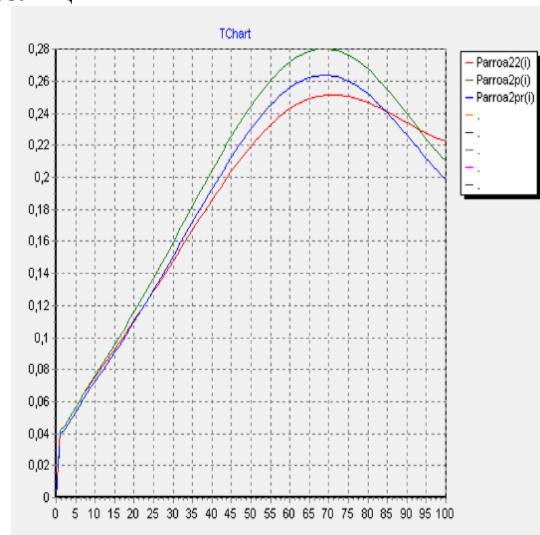


Рис.2. $rod(z) = 3.1 - \cos^2(0.393 \cdot z)$,
 $Cm(z) = 2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$,
 $ra(z) = 2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$,
 $rom(z) = 3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$, $z = 1$, $\varepsilon = \pm 0.01$

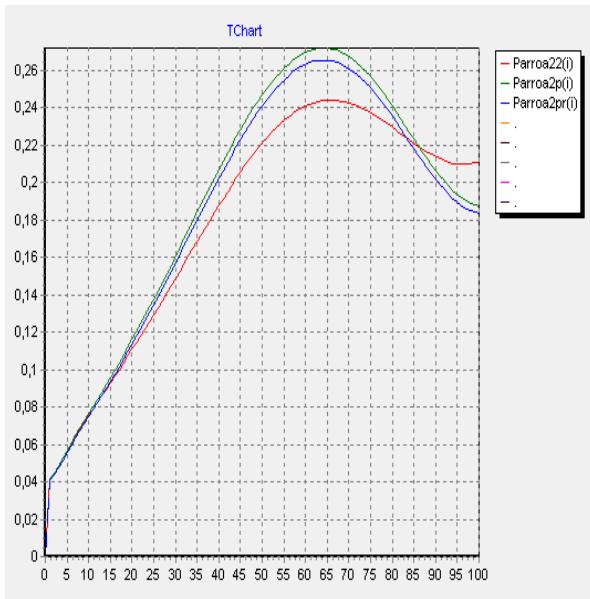


Рис.3. $rod(z) = 3.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$,
 $Cm(z) = 2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$,
 $ra(z) = 2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$,
 $rom(z) = 3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$, $z = 1$, $\varepsilon = \pm 0.004$

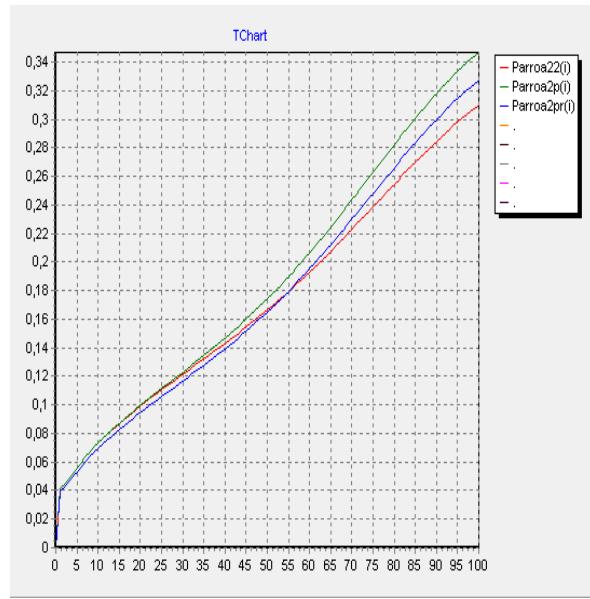


Рис.4. $rod(z) = 1.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$,
 $Cm(z) = 2.1 - \cos^2(6.28 \cdot z)$,
 $ra(z) = 2.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$,
 $rom(z) = 3.6 - \cos^2(6.28 \cdot z)$, $z = 0.6$, $\varepsilon = \pm 0.01$

Графики таблицы 2

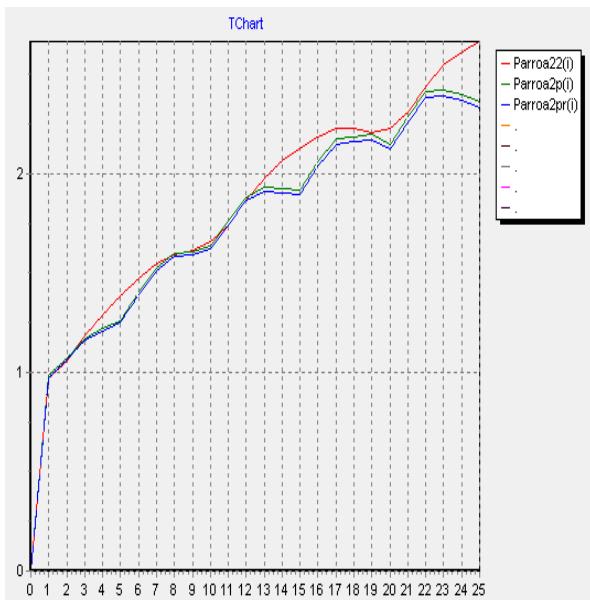


Рис.5. $rod(z) = 13 - \cos^4(3.14 \cdot z)$, $Cm(z) = 1$,
 $ra(z) = 1$, $rom(z) = 1$, $z = 4$, $\varepsilon = \pm 0.001$

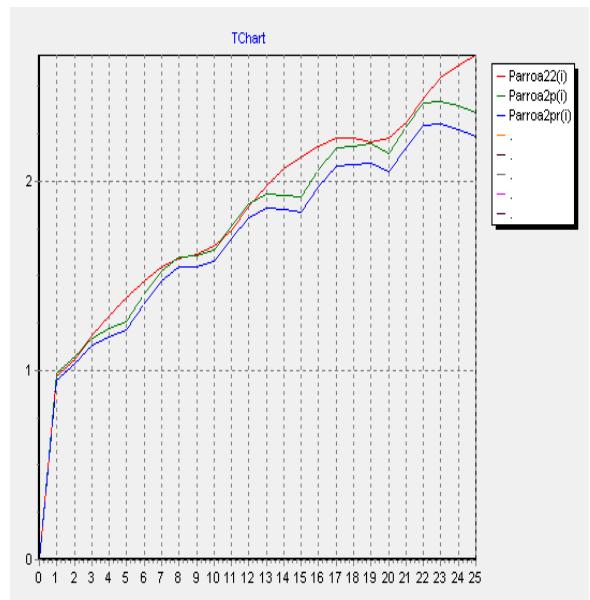


Рис.6. $rod(z) = 13 - \cos^4(3.14 \cdot z)$, $Cm(z) = 1$,
 $ra(z) = 1$, $rom(z) = 1$, $z = 4$, $\varepsilon = \pm 0.004$

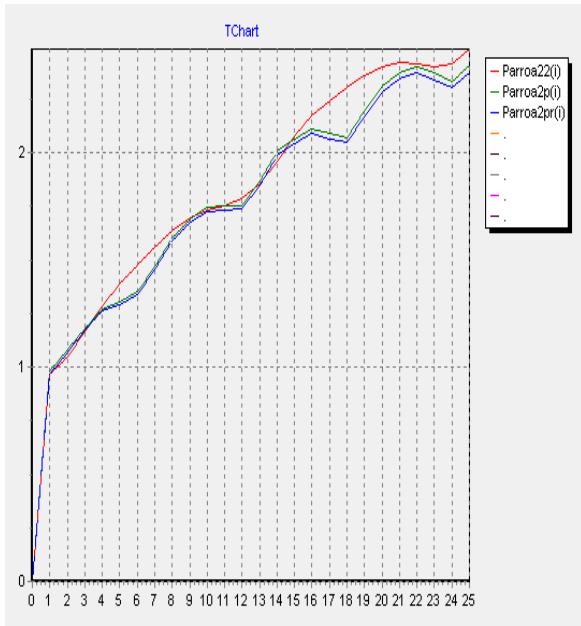


Рис.7. $rod(z) = 5 - \cos^4(3.14 \cdot z)$, $Cm(z) = 1$,
 $ra(z) = 1$, $rom(z) = 1$, $z = 4$, $\varepsilon = \pm 0.001$

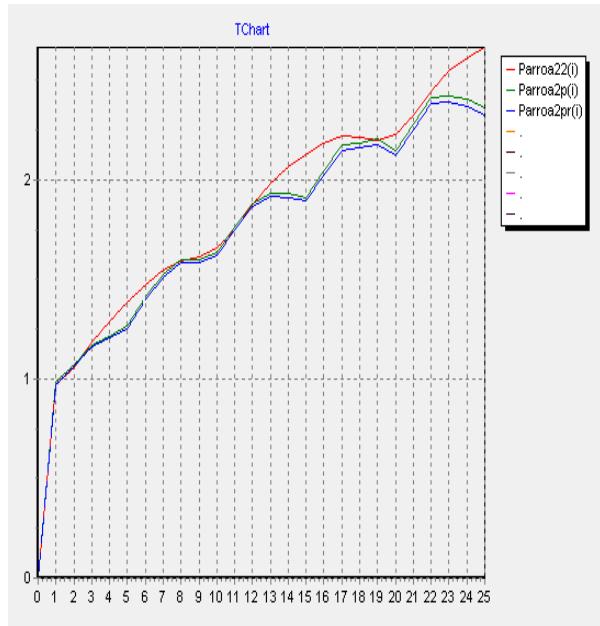


Рис.8. $rod(z) = 13 - \cos^4(6.28 \cdot z)$, $Cm(z) = 1$,
 $ra(z) = 1$, $rom(z) = 1$, $z = 4$, $\varepsilon = \pm 0.001$

Графики таблицы 3

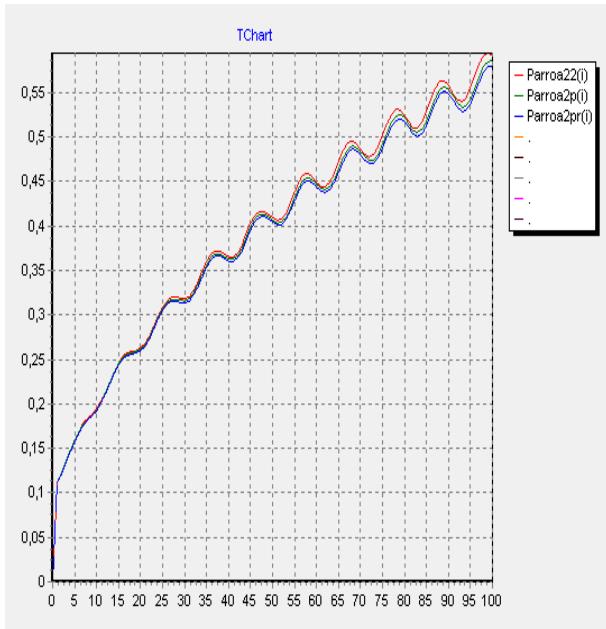


Рис.9. $rod(z) = 3 - 0.2 \cos^2(1258 \cdot z)$,
 $Cm(z) = 1$, $ra(z) = 1$, $rom(z) = 1$,
 $z = 4$, $\varepsilon = \pm 0.001$

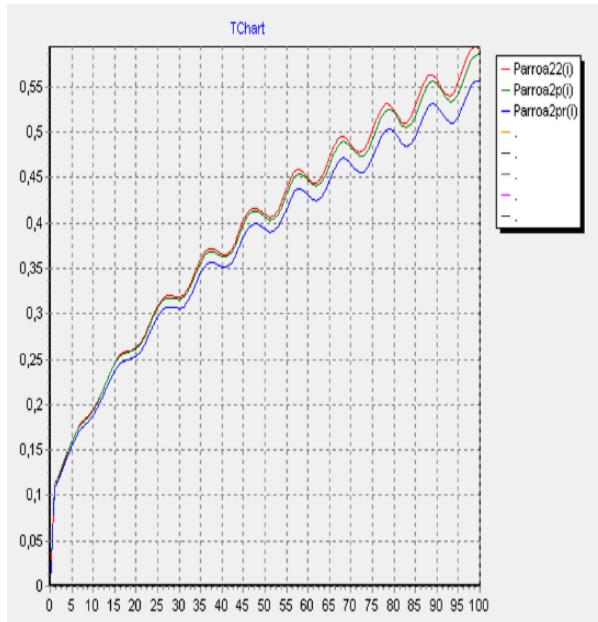


Рис.10. $rod(z) = 3 - 0.2 \cos^2(1258 \cdot z)$,
 $Cm(z) = 1$, $ra(z) = 1$, $rom(z) = 1$,
 $z = 4$, $\varepsilon = \pm 0.005$

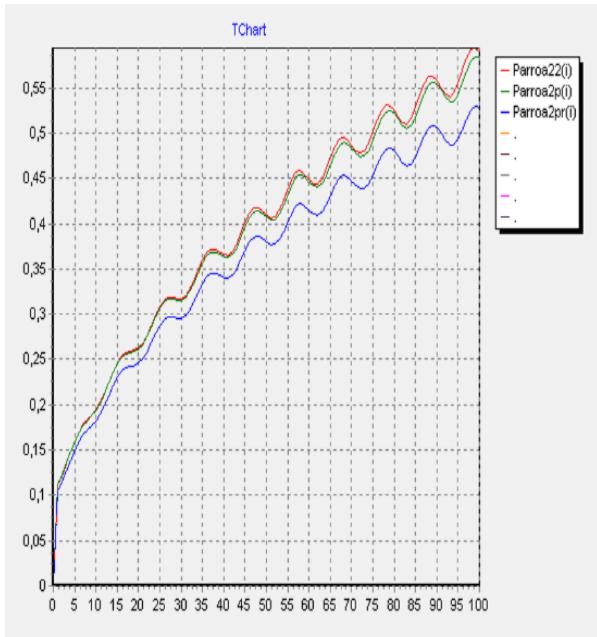


Рис.11. $rod(z) = 8 - 0.2\cos^2(13.58 \cdot z)$,
 $Cm(z) = 1$, $ra(z) = 1$, $rom(z) = 1$,
 $z = 4$, $\varepsilon = \pm 0.01$

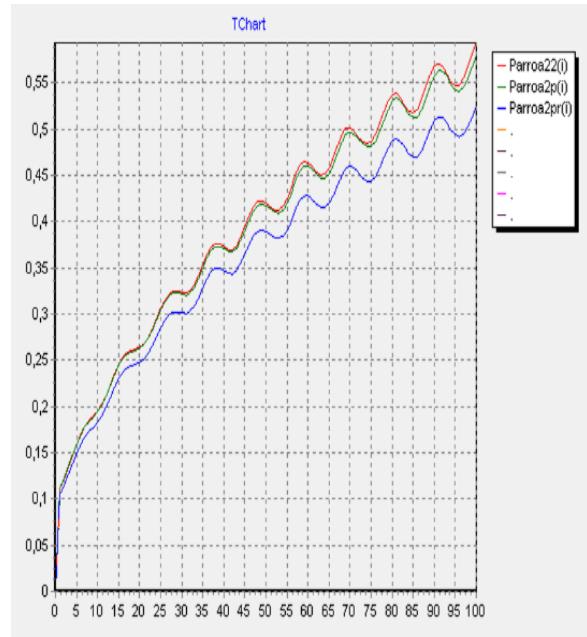


Рис.12. $rod(z) = 3 - 0.5\cos^2(12.58 \cdot z)$,
 $Cm(z) = 1$, $ra(z) = 1$, $rom(z) = 1$,
 $z = 4$, $\varepsilon = \pm 0.01$

Графики таблицы 4

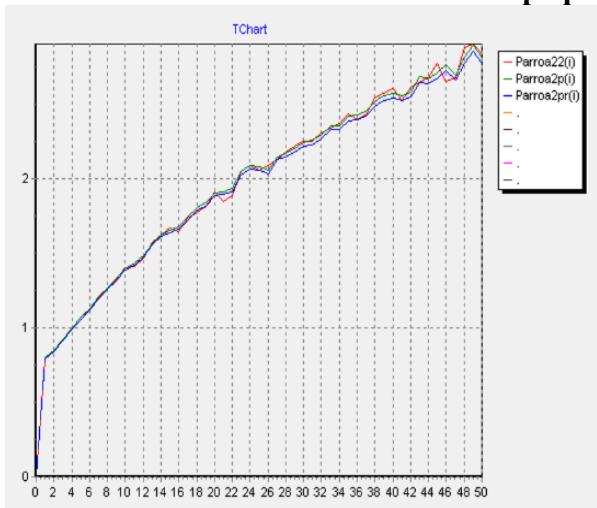


Рис.13. $rod(z) = \text{импульсная}$, $Cm(z) = 1$,
 $ra(z) = 1$, $rom(z) = 1$, $z = 4$, $\varepsilon = \pm 0.001$

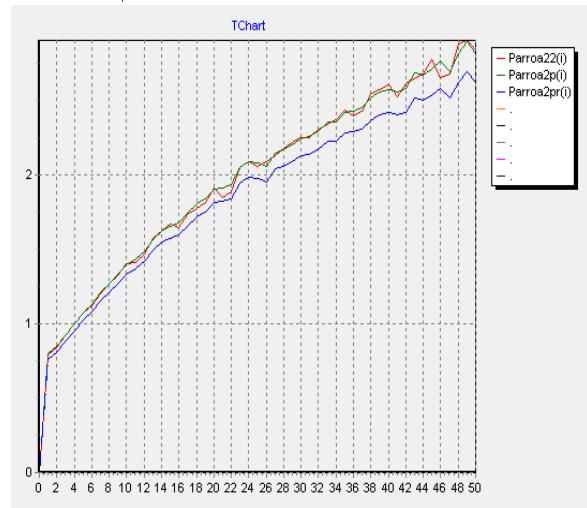


Рис.14. $rod(z) = \text{импульсная}$, $Cm(z) = 1$,
 $ra(z) = 1$, $rom(z) = 1$, $z = 4$, $\varepsilon = \pm 0.005$

Графики таблицы 5

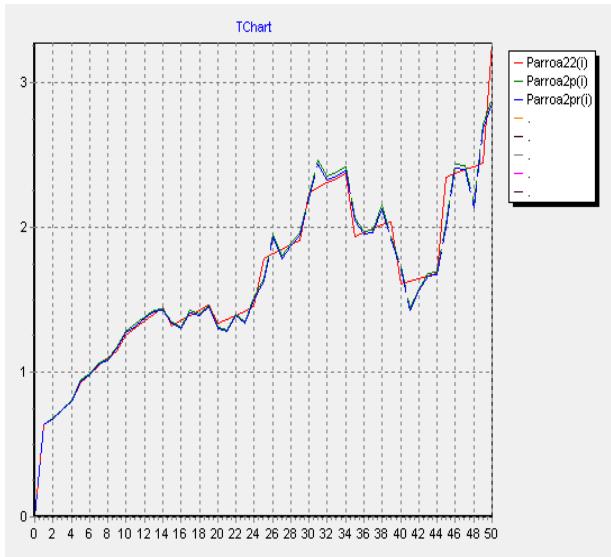


Рис.15. $rod(z)$ = ступенчатая, $Cm(z) = 1$,
 $ra(z) = 1$, $rom(z) = 1$, $z = 3$, $\varepsilon = \pm 0.001$

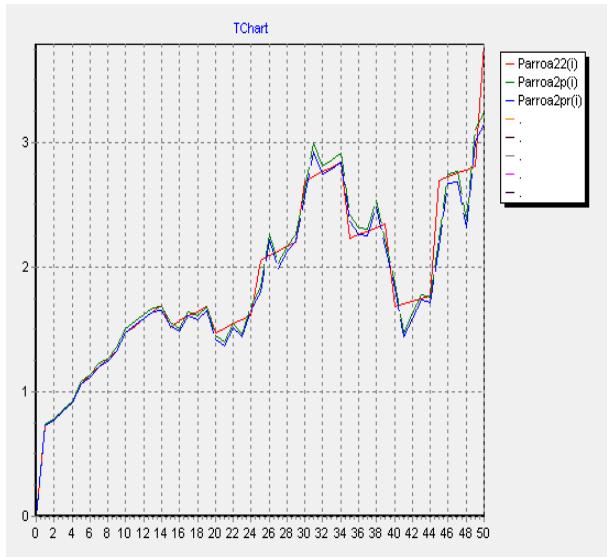


Рис.16. $rod(z)$ = ступенчатая, $Cm(z) = 1$,
 $ra(z) = 1$, $rom(z) = 1$, $z = 2$, $\varepsilon = \pm 0.001$

Список использованных источников

- Богатов Н.М., Григорьян Л.Р., Понетаева Е.Г. Моделирование распространения электрического импульса в нервном волокне // Коллективная монография. Современные проблемы физики, биофизики и инфокоммуникационных технологий. Краснодар: Краснодарский ЦНТИ, 2012. С. 33-44.
- Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. // Новосибирск. Сибирское научное издательство, - 2009. - С. 342.