ЭКИНЧИ ТЕКТЕГИ ОПЕРАТОРДУК ТЕНДЕМЕНИНЕ ЖАКЫНДАШТЫРЫЛГАН ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Усенов И.А.,к.ф.-м.н., Ж. Баласагын атындагы КУУ , iausen@mail.ru,

Жапарова З., к.ф.-м.н., Ж. Баласагын атындагы КУУ, ziynat83@mail.ru

Аннотация: Ар түрдүү колдонмо жана математикалык теориялар областындагы маселелерди изилдөөдө табигий түрдө корректүү же корректүү эмес маселелер пайда болот. Маселедеги баштапкы берилиштер жакындаштырылып берилген учурда, ага туура келген чыгарылышта чоң өзгөрүү пайда болот, башкача айтканда маселедеги турумдуулук бузулат. Колдонмо математиканын дээрлик баардык маселелери корректүү эмес маселелер болуп саналат. Ушул себебтен, бул класстагы колдонмо маселердин чыгаруу актуалдуу болуп эсептелинет.

Бул иште бир тектүү оператордук теңдеме нолдук эмес чыгарылышка ээ болгон учурда, гильберт мейкиндигинде кичи параметир ыкмасы менен бир тектүү эмес оператордук теңдеменин жакындаштырылган нормалдык чыгарылышы тургузулган. Жакындаштырылган чыгарылыштын нормалдык чыгарылышка жыйналуучулугунун баалосу алынган. Бул иште каралган мисал аркылуу, тургузулган теориянын тууралыгын негиздезек болот.

Өзөктүү сөздөр: оператордук теңдеме, нормалдык чыгарылыш, гильберт мейкиндиги.

Приближенное решение операторного уравнения второго рода

Усенов И.А.,к.ф.-м.н., КНУ им. Ж. Баласагына, iausen@mail.ru,

Жапарова З. к.ф.-м.н., КНУ им. Ж. Баласагына, ziynat83@mail.ru

Аннотация: При решении разнообразных прикладных задач, а также при исследованиях в области математической теории естественным образом возникают так называемые корректно и некорректно поставленные задачи. Некорректно поставленные задачи или, другими словами, задачи, неустойчивые по отношению к погрешностям в их исходных данных, отличаются тем, что сколь угодно малые изменения в этих исходных данных приводят к произвольно большим изменениям решений таких задач.

В данной работе в гильбертовом пространстве методом малого параметра построено приближенное нормальное решение операторного уравнения второго рода в случае, когда однородное уравнение имеет ненулевое решение. Получена оценка сходимости приближенного решения к нормальному решению уравнения. На основе изложенного рассмотрен пример, подтверждающий верность построенной теории.

Ключевые слова: Операторное уравнения, нормальное решения, пространство гильберта.

APPROXIMATE SOLUTION OF THE OPERATOR EQUATION OF THE SECOND KIND

Usenov I.A., KNU them. J. Balasagyn, iausen@mail.ru

Zhaparova Z. , KNU them. J. Balasagyn, ziynat83@mail.ru

Annotation: When solving a variety of applied problems, as well as in research in the field of mathematical theory, so-called correctly and incorrectly posed problems naturally arise. Incorrectly posed problems or, in other words, tasks that are unstable with respect to errors in their input data are distinguished by the fact that arbitrarily small changes in these input data lead to arbitrarily large changes in the solutions of such tasks.

In this paper, in the Hilbert space, a small parameter method is used to construct an approximate normal solution of an operator equation of the second kind in the case when a homogeneous equation has a nonzero solution. An estimate of the convergence of the approximate solution to the normal solution of the equation is obtained. On the basis of the above, an example confirming the correctness of the constructed theory is considered.

Keywords: operator equations, normal solutions, Hilbert space.

УДК: 517.94

1. Постановка задач

Рассмотрим операторное уравнение второго рода вида

$$z = Az + u, \tag{1}$$

где A- линейный вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H.

Допусти, что оператор A- является самосопряженным и единица является собственным значениям оператора A. Тогда, как известно, уравнение (1) при условии $(u, z_0) = 0$ имеет решение, представимое в виде $z = z_0 + z^*$, где z_0- ненулевое решение однородного уравнения, z^*- псевдорешение неоднородного уравнения (1).

Оператор A^+, удовлетворяющий условию $z^* = A^+ u$, называется псевдообратным оператором.

Пусть вместо элемента u известно u_δ такое, что $\|u_\delta - u\| \le \delta$ и для элемент u_δ не имеет место условие $(u_\delta, z_0) \ne 0$. Тогда уравнение (1) с элементом u_δ решения не имеет.

Таким образом, уравнения (1) с приближенно заданной правой частью относится к классу некорректно поставленных задач.

2. Регуляризация решения.

Для регуляризации решения уравнения (1), наряду с уравнением рассмотрим уравнение второго рода с малым параметром вида

$$\alpha z_\alpha^\delta + z_\alpha^\delta = A z_\alpha^\delta + u_\delta. \tag{2}$$

Наряду с уравнением (2) рассмотрим уравнение с точно заданной правой частью

$$\alpha z_\alpha + z_\alpha = A z_\alpha + u. \tag{3}$$

Пусть $1,\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_k,..$-собственные числа и $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,...,\varphi_k,..$соответствующие ортонормированные собственные элементы оператора A. Следовательно

$$Az_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k z_{\alpha k} \varphi_k. \tag{4}$$

Тогда из (3) имеем

$$z_\alpha = \frac{1}{1+\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k z_{\alpha k} \varphi_k + \frac{u}{1+\alpha}. \tag{5}$$

Вычисляя коэффициенты Фурье от обеих частей (5), имеем

$z_{\alpha k} = \frac{\lambda_k z_{\alpha k}}{1+\alpha} + \frac{u_k}{1+\alpha}$, где $z_{\alpha k} = (z_\alpha, \varphi_k),\ u_k = (u, \varphi_k),\ (\varphi_k, \varphi_k) = 1,\quad k = 1,2,...$.

Отсюда учитывая, что $u_1 = (u, \varphi_1) = 0$ получаем

$$z_{\alpha 1} = 0,\quad z_{\alpha_k} = \frac{u_k}{1+\alpha-\lambda_k},\ k = 2,3,... \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), имеем

$$z_\alpha = \frac{1}{1+\alpha} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_k u_k}{1+\alpha-\lambda_k} \varphi_k + \frac{u}{1+\alpha}. \tag{7}$$

Нормальное решение z^* представимо в виде

$$z^* = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_k u_k}{1-\lambda_k} \varphi_k + u. \tag{8}$$

Если учитывать решения уравнения (3), то решение уравнения (2) определяется

$$z_\alpha^\delta = \frac{1}{1+\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k u_{\delta k}}{1+\alpha-\lambda_k} \varphi_k + \frac{u_\delta}{1+\alpha}. \tag{9}$$

Оценим разность $z_\alpha^\delta - z^*$. Используя неравенство треугольника, имеем

$$\left\| z_\alpha^\delta - z^* \right\| \le \left\| z_\alpha^\delta - z_\alpha \right\| + \left\| z_\alpha - z^* \right\|. \tag{10}$$

Из (9) и (7), имеем

$$\left\| z_\alpha^\delta - z_\alpha \right\| \le 2\delta + \frac{\delta}{\alpha} \tag{11}$$

При оценке использовано неравенство Бесселя и

$\lambda_1 = 1,\ \|\varphi_1\|^2 = 1,\ \left|u_{\delta_1} - u_1\right| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(u_{\delta_k} - u_k\right)^2\right)^{1/2} \le \delta, \left|\frac{\lambda_k}{1+\alpha-\lambda_k}\right| \le \frac{|\lambda_k|}{\left\|\lambda_k| - |1+\alpha\right\|} \le 1$ для любого $k \ge 1,\ \frac{1}{1+\alpha} \le 1$.

Далее оценим разность $z_\alpha - z^*$. Из (7) и (8) получаем

$$\left\| z_\alpha - z^* \right\| \le 2\alpha \|u\| \tag{12}$$

Учитывая оценки (11) и (12) из (10) получаем

$$\left\| z_\alpha^\delta - z^* \right\| \le 2\delta + \frac{\delta}{\alpha} + 2\alpha \|u\|. \tag{13}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(\alpha) = 2\delta + \frac{\delta}{\alpha} + 2\alpha\|u\| \tag{14}$$

Минимизируя функцию (14), имеем

$$\alpha(\delta) = \left(\delta \big/ 2\|u\|\right)^{1/2} \tag{15}$$

Подставляя значение (15) в правую часть неравенства (13), получаем

$$\left\| z_\alpha^\delta - z^* \right\| \le 2\sqrt{\delta}\left(1 + 2\|u\|\right) \tag{16}$$

Из неравенства (16) следует, что $z_\alpha^\delta \to z^*$ при. $\delta \to 0$

Таким образом, z_α^δ является приближенным нормальным решением уравнения (1).

Доказана следующая

Теорема. Пусть: 1) единица является собственным значением самосопряженного линейного оператора A; 2) выполнены условия (16) и $\|u_\delta - u\| \le \delta$. Тогда решение уравнения (2) является приближенным псевдо решением уравнения (1) и справедлива оценка (16).

Пример: Рассмотрим интегральное уравнение второго рода

$$z(x) = \int_0^1 (x^2 s^2 + \frac{36}{41}) z(s)ds + 45{,}1 - 123x^2 \cdot \tag{17}$$

Для регуляризации решения уравнения (17), наряду с уравнением рассмотрим уравнение второго рода с малым параметром вида

$$\alpha z_\alpha^\delta(x) + z_\alpha^\delta(x) = \int_0^1 (x^2 s^2 + \frac{36}{41}) z_\alpha^\delta(s)ds + 45{,}1 - 123x^2 \cdot \tag{18}$$

Наряду с уравнением (18) рассмотрим уравнение с точно заданной правой частью

$$\alpha z_\alpha(x) + z_\alpha(x) = \int_0^1 (x^2 s^2 + \frac{36}{41}) z_\alpha(s)ds + 45 - 123x^2 \cdot \tag{19}$$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{205}{16}$ -собственные числа и $\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1701}}\left(15x^2 + 36\right), \quad \phi_2(x) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{1701}}\left(45 - 123x^2\right)$

соответствующие ортонормированные собственные функции оператора.

Решение уравнения (19), имеет вид

$$z_\alpha(x) = \frac{\frac{205}{16}\frac{2\sqrt{1701}}{\sqrt{5}}}{(1+\alpha)\left(1 + \alpha - \frac{205}{16}\right)}\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{1701}}\left(45 - 123x^2\right) + \frac{45 - 123x^2}{1+\alpha} \cdot \tag{20}$$

Нормальное решение z^* представимо в виде

$$z^*(x) = \frac{205/16}{1 - 205/16}\left(45 - 123x^2\right) + 45 - 123x^2 \cdot \tag{21}$$

Если учитывать структуру решения уравнения (19), то решения уравнения (18) находится по формуле

$$z_{\alpha}^{\delta}(x)=\frac{\frac{41\delta}{\sqrt{1701}}}{(1+\alpha)\alpha}\frac{1}{\sqrt{1701}}\left(15x^2+36\right)-\frac{\frac{205}{16}\left(\frac{2\sqrt{1701}}{\sqrt{5}}+\frac{2\sqrt{5}\delta}{\sqrt{1701}}\right)}{(1+\alpha)\left(1+\alpha-\frac{205}{16}\right)}\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{1701}}\left(45-123x^2\right)+\frac{45-123x^2+\delta}{1+\alpha}. \tag{22}$$

Оценим разность $z_{\alpha}^{\delta}(x)-z^{*}(x)$

$$\left\|z_{\alpha}^{\delta}(x)-z^{*}(x)\right\|\le\left\|z_{\alpha}^{\delta}(x)-z_{\alpha}(x)\right\|+\left\|z_{\alpha}(x)-z^{*}(x)\right\|\le\left(\frac{41+2\sqrt{5}}{\sqrt{1701}}\right)\delta+\frac{\delta}{\alpha}+\left(\frac{2\sqrt{1701}}{\sqrt{5}}+36{,}7\right)\alpha. \tag{23}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(\alpha)=\left(\frac{41+2\sqrt{5}}{\sqrt{1701}}\right)\delta+\frac{\delta}{\alpha}+\left(\frac{2\sqrt{1701}}{\sqrt{5}}+36{,}7\right)\alpha. \tag{24}$$

Вычислим первую производную этой функции и приравниваем ее к нулю

$$\psi'(\alpha)=-\frac{\delta}{\alpha^2}+\left(\frac{2\sqrt{1701}}{\sqrt{5}}+36{,}7\right)=0$$

Отсюда

$$\alpha(\delta)=\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{1701}+36{,}7\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}} \tag{25}$$

Подставляя значение (25) в правую часть неравенства (23), получаем

$$\left\|z_{\alpha}^{\delta}(x)-z^{*}(x)\right\|\le\left(\frac{41+2\sqrt{5}}{\sqrt{1701}}+2\left(\frac{2\sqrt{1701}+36{,}7\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\delta^{\frac{1}{2}}. \tag{26}$$

Из неравенства (26) следует, что $z_{\alpha}^{\delta}\to z^{*}$ при $\delta\to 0$.

Таким образом, z_{α}^{δ} является приближенным нормальным решением уравнения (17).

Список литературы

1. *Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики.-Новосибирск, 1962.*
2. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения.- Наука, 1978.*
3. *Саадабаев А. Приближенные методы решения нелинейных интегральных и операторных уравнений 1-го рода.- Бишкек, 1997.*
4. *Саадабаев А. Регуляризация операторного уравнения второго рода // Исслед. по интегро-дифф. уравнен. вып. 15, 1982 г.*
5. *Усенов И.А. Об регуляризируемости решения неявного операторного уравнения первого рода с приближенным оператором// Материаловедение. Труды II международной межвузовской научно-практической конференции «Инновационные технологии и передовые решения», Бишкек -2014г.стр.58-62.*
6. *Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа.-М.: Наука, 1965.*